diesse
Didattica e Innovazione Scolastica
Centro per la formazione e l'aggiornamento

diesse
Le Botteghe
dell'Insegnare

Diesse forma e innova: Le Botteghe dell'Insegnare

MATEMATICA

La bellezza in matematica: un'esperienza possibile.
Esempi e percorsi
4

Analisi

Paolo Toni

percorso 2015 - 2016

Parlare di bellezza in matematica è molto più che cogliere i suoi evidenti legami con l'arte e con la musica (la sezione aurea, la simmetria, le armoniche…). Tramite il racconto di esperienze svolte in classe emergerà la possibilità di riscoprirla all'interno di contenuti e percorsi che consentano di giungere agli obiettivi previsti dalle indicazioni Nazionali. Le esperienze andranno dall'equiscomponibilità delle figure piane alle costruzioni con riga e compasso, dalla statistica all'analisi.

Per il contesto in cui si inserisce il contributo di Paolo Toni cfr. Matematica2015-report

Studio di funzione

In tutti i libri di testo, anche i più recenti, lo studio di funzione è affrontato in modo standard come avveniva 40 anni fa, senza particolari variazioni.

L'Analisi stessa viene introdotta in modo autonomo dai precedenti capitoli relativi all'algebra e alla geometria analitica.

Anche se le funzioni vengono classificate in algebriche e trascendenti, vengono però studiate in modo unitario, senza valorizzare le proprietà peculiari delle prime.

Anche la distinzione tra equazioni e funzioni arresta lo studio delle prime e delle curve algebriche alle sole coniche, senza interazioni tra curve algebriche di 3° o 4° grado con le funzioni algebriche collegate. Nella prova di maturità del liceo scientifico di quest'anno, nel quesito 1 del 2° problema si parlava per la prima volta di "grado":

Nel caso f(x) fosse esprimibile con un polinomio, quale potrebbe essere il suo grado minimo? Illustra il ragionamento seguito.

Nella mia esperienza didattica ho riscontrato da più di 30 anni che le sinergie tra l'Algebra, la Geometria analitica e l'Analisi sono molto efficaci, semplificanti, apprezzate e gradite dagli studenti.

Anche se, per ragioni di difficoltà, le funzioni vengono studiate a partire da quelle algebriche intere per passare alle fratte, alle irrazionali, alle trascendenti e via dicendo, il metodo di studio rimane però sempre lo stesso, mettendo in sostanza tutte le funzioni in un unico quadro concettuale. In questo modo l’Analisi, nell’esibire in primis, com’è naturale, i suoi gioielli (i concetti di infinito e di limite con i suoi figli primigeni: la derivata e l’integrale), rischia di staccarsi dalle sue radici. Essa, non solo, non può prescindere dal suo entroterra ma, anziché trascurarlo o penalizzarlo, trova molti vantaggi nel valorizzare al massimo le sue interconnessioni con l’Algebra, la Geometria, la Geometria analitica, la Trigonometria e il Calcolo logaritmico/esponenziale in una sinergia sinfonica.

Come vedremo, per le funzioni algebriche, conviene vedere i grafici di funzione anche nel loro aspetto di “Curve algebriche”, intere o in singoli archi o rami, lasciando dialogare funzioni ed equazioni, con sommo gaudio dell’Algebra e della Geometria analitica.

Il menù classico:

- Dominio - Simmetrie - Segno - Limiti - Asintoti verticali, orizzontali, obliqui Derivata prima, suo segno, massimi e minimi- Derivata seconda, suo segno, concavità e flessi - Grafico

Il difetto fondamentale di questo schema è che il grafico, nella sua interezza, viene solo alla fine e che qualsiasi errore anche banale, in uno qualsiasi dei 7 punti precedenti, porta a un quadro contraddittorio con scarse possibilità di trovare e correggere l’errore commesso. Tutto ciò si fa poi più penoso più la funzione è complessa.

Spesso gli studenti, più che segnalare una contraddizione, tentano di tracciare grafici impossibili e incompatibili con i dati complessivi ottenuti.

Nella mia esperienza didattica, ho trovato vincente seguire, con calma, un cammino di studio sequenziale delle funzioni, seguendo la suddivisione:

1. Funzioni algebriche
2. Funzioni trascendenti
3. Funzioni speciali

Al lato lo schema:

N.B: “Scala di Lamberti” e “Scala Paradisi” sono mie personali denominazioni di due funzioni definite da Pier Domenico Lamberti, ho chiamato “funzioni nebbia” o “funzioni di Dio” quelle funzioni non definibili “umanamente”, matematicamente dette “non costruibili”, che mostrano un grafico “nebbioso”.

Uno schema più dettagliato

- A_1) Funzioni razionali intere (polinomiali)
- A_2) Funzioni razionali fratte
- A_3) Funzioni irrazionali
- A_4) Funzioni con valore assoluto o con restrizioni dei tipi precedenti
- B_1) Funzioni trascendenti elementari (seno, coseno, tangente, logaritmo, ecc…)
- B_2) Funzioni trascendenti complesse
- C_1) La funzione di Dirichlet
- C_2) Funzioni similari a quella di Dirichlet
- C_3) Funzioni con alto grado di libertà fino alle indefinibili

Le funzioni polinomiali (A_1)

le mamme di tutte le funzioni!

- Gli ingegneri, i fisici, quando ci riescono, cercano sempre lo sviluppo in serie di potenze, cioè polinomiale, di una funzione trascendente, che ben l'approssimi. È quello che fa la calcolatrice quando calcola il seno di un angolo o il logaritmo di un numero.
- L'errore resta fuori dal display e il ragazzo non si accorge del trucco!
- Ma le funzioni algebriche (tipo A) possiedono virtù eccezionali, che le rendono facilmente trattabili in modo del tutto particolare e in naturale successione alle curve di primo e secondo grado già studiate (rette e parabole). Esse sono prima di tutto classificabili secondo il loro grado.

L’importanza del grado

- Il **grado** ci dà il **numero massimo dei punti di intersezione (contati con la loro molteplicità) del grafico con una retta qualsiasi del piano**.
- Il grado si determina in meno di un minuto e dà un vincolo fortissimo al grafico. Non serve solo alla fine dello studio, per vedere se il grafico tracciato ha qualche punto in più su una retta rispetto al consentito, ma aiuta anche in fase di studio a scegliere tra le varie possibilità di rami o archi del grafico!
- Le funzioni A_1 inoltre sono continue e derivabili ovunque per cui basta trovare i punti di intersezione/contatto del grafico con l’asse x, con la loro molteplicità, e il grafico, da un punto di vista qualitativo, è già pronto e servito!
- I punti **semplici** sono di pura **intersezione**.
- I punti **multipli pari** sono di tangenza di **ondulazione** (min o max relativi).
- I punti **multipli dispari** sono di tangenza di **inflessione orizzontale**.

Esempio 1

Data la funzione

$$y = x^3(x-2)^2(x+3)(x-4)$$

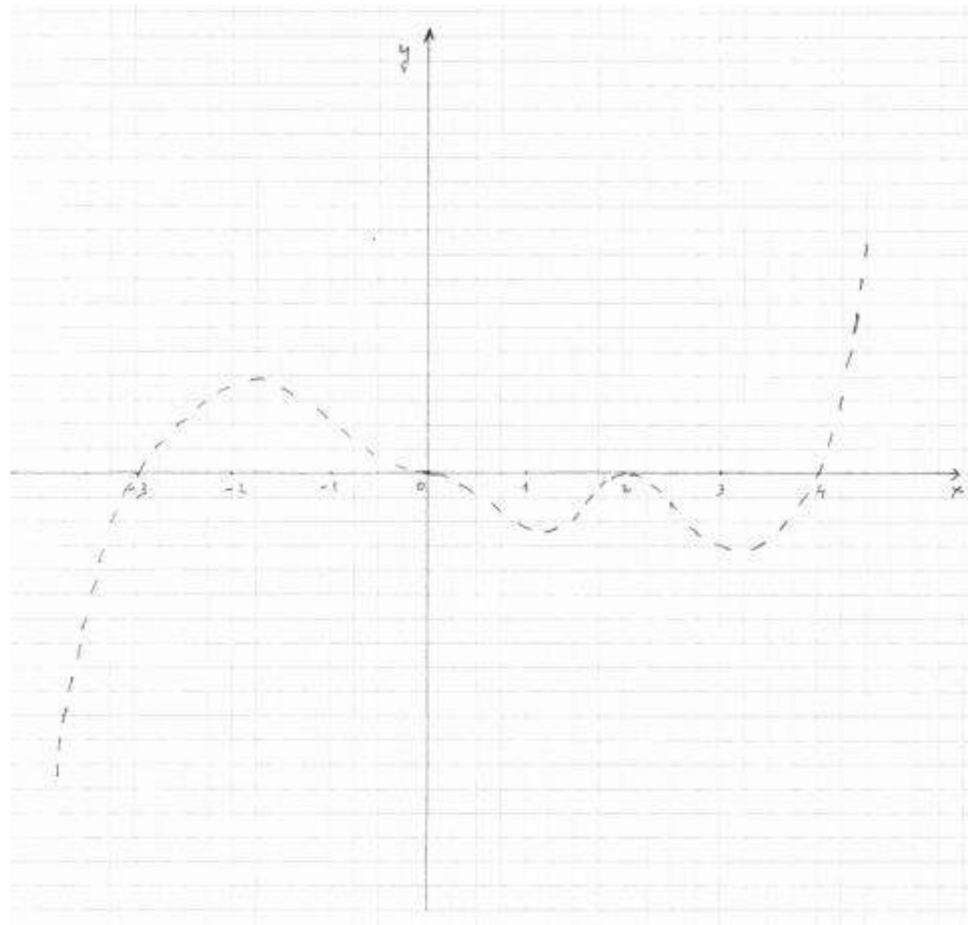
Con

$x_{1,2,3} = 0$ *punto triplo*

$x_{4,5} = 2$ *punto doppio*

$x_6 = -3$ *punto semplice*

$x_6 = +4$ *punto semplice*



una sua prima bozza potrebbe risultare:

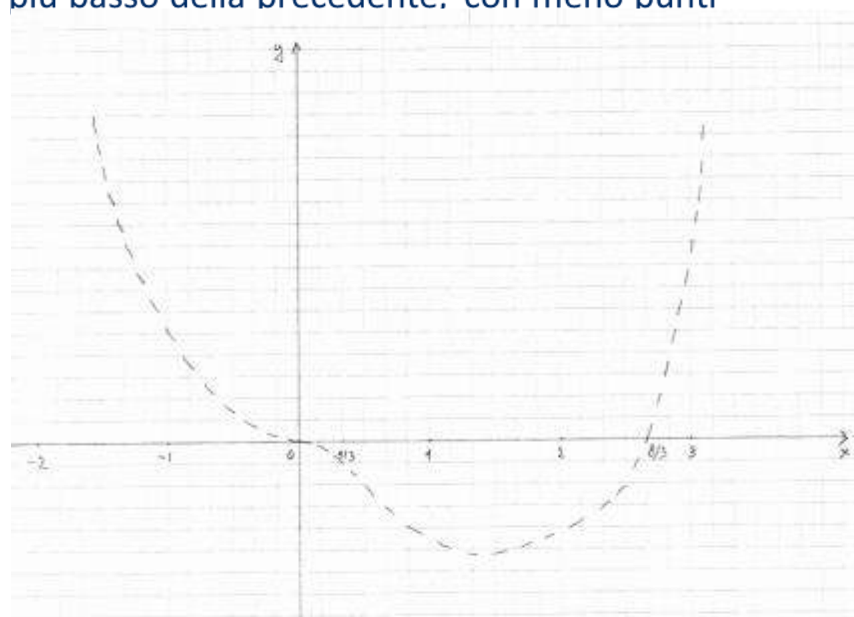
O la sua simmetrica rispetto l'asse x.

Il passaggio dalla bozza del grafico alla versione finale necessita di poche integrazioni:

la derivata prima, per localizzare gli estremi relativi e la tangente nei punti semplici sull'asse x, e la derivata seconda se si vogliono individuare i punti di flesso.

Esempio 2

- Esaminiamo adesso una funzione di grado più basso della precedente, con meno punti sull'asse x.



- $y = \frac{3}{8}x^4 - x^3 = x^3\left(\frac{3}{8}x - 1\right)$
- Notiamo che
- $x_{1,2,3} = 0 \quad \textit{punto triplo}$
- $x_4 = \frac{8}{3} \quad \textit{punto semplice}$
- Le bozze possibili sono il grafico
- a destra oppure la sua simmetrica rispetto all'asse x

Le funzioni razionali fratte

Lo studio della famiglia A_2 si può dividere in due parti: una preliminare, rapida e facile, che porta ad una bozza già molto significativa e vincolante e una seconda di rifinitura e conferma.

La parte preliminare si compone soltanto dei seguenti punti:

1. Grado della curva
2. Dominio e punti di discontinuità
3. Comportamento asintotico

- A riguardo del comportamento asintotico è bene subito precisare che è necessario andare oltre alla ricerca dei soli asintoti verticali, orizzontali ed obliqui per aprirsi a tutte le parabole asintoto dei vari ordini.

NOTA bene

- Una funzione fratta del tipo
- $y = \frac{P_{n+r}(x)}{P_n(x)}$ dove l'indice indica il grado del polinomio, con $r \geq 0$ può venire riscritta in forma mista:
- $y = \frac{P_{n+r}(x)}{P_n(x)} = Q_r(x) + \frac{R(x)}{P_n(x)}$ Dove $Q_r(x)$ indica il quoziente della divisione e $R(x)$ il suo resto dove il grado di $R(x) < n$ e $y = Q_r(x)$ rappresenta la parabola asintoto di ordine *r*, perché $lim_{x \to +\infty} \frac{R(x)}{P_n(x)} = 0$ qualunque sia il valore di n.
- Per cui con:
- r = 0 avremo un asintoto orizzontale
- r = 1 avremo un asintoto obliquo
- r = 2 avremo un asintoto parabolico (parabola classica)
- r = n avremo un asintoto parabolico di ordine n.
- E' chiaro che a noi interessano principalmente i primi tre tipi di asintoto, con apertura quindi alla parabola.

Esempio 3

- Studiamo la funzione $y = \frac{x^3}{x-1}$
- **Studio bozza:**

1. Il grado della curva è 3 perché in forma intera l'equazione si può scrivere:

- $\boldsymbol{x^3 - xy + y = 0 \qquad max\{3, 2, 1\} = 3}$

2. Il dominio è $R\backslash\{1\}$ La funzione è continua e derivabile in tutto il dominio e il suo grafico è formato da due rami continui e derivabili nei due semipiani separati dalla retta x=1
3. Facendo la divisione, si può riscrivere la funzione nella forma:

$$\boldsymbol{C\!: \ y = x^2 + x + 1 + \frac{1}{x-1}}$$

Scritta in questo modo possiamo notare che

$$\boldsymbol{y = x^2 + x + 1 + \frac{1}{x-1}}$$

$\boldsymbol{P}$: $\boldsymbol{y = x^2 + x + 1}$ è la parabola asintoto della curva C , poiché $lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-1} = 0$ inoltre se cerchiamo le intersezioni di C con P ci accorgiamo che $C \cap P = \emptyset$ infatti il sistema

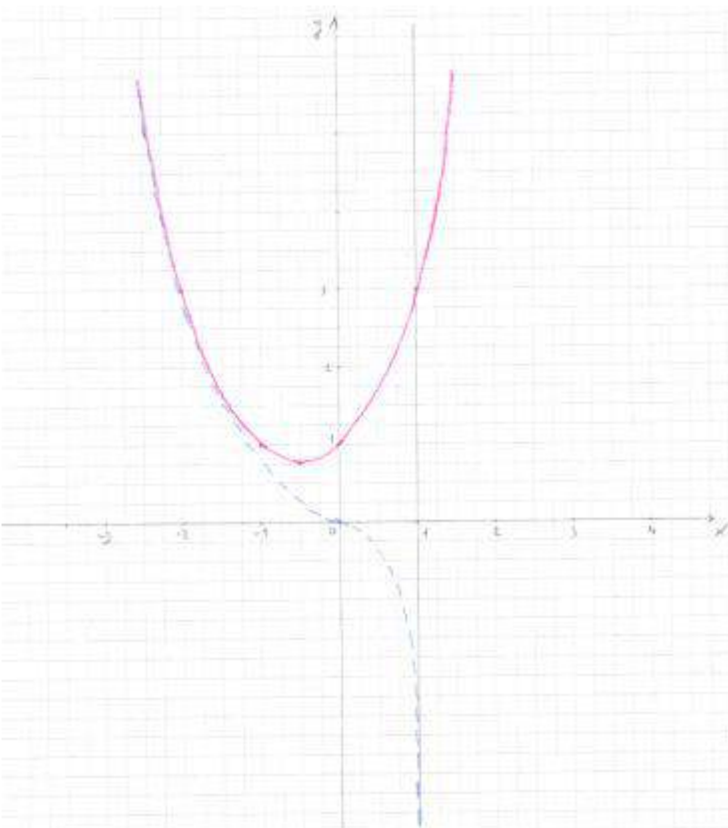
$$\begin{cases} \boldsymbol{y = x^2 + x + 1 + \frac{1}{x-1}} \\ \boldsymbol{y = x^2 + x + 1} \end{cases}$$

che porta all'equazione: $\boldsymbol{\frac{1}{x-1}}$=0 è impossibile.

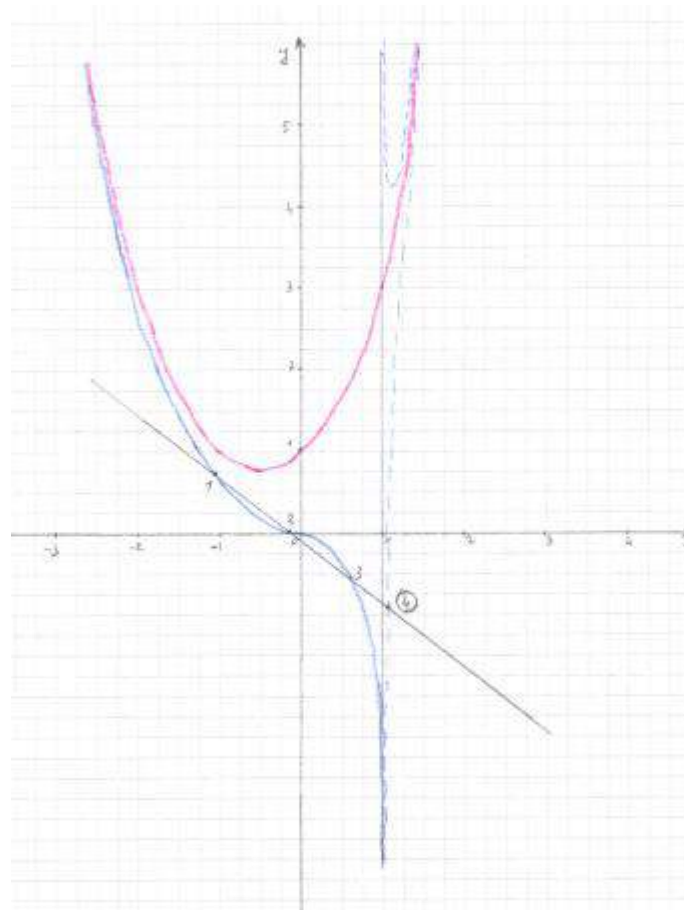
Da queste informazioni sappiamo che i due rami scorrono a fianco della parabola senza attraversarla. Inoltre per sapere se il ramo di sinistra di C scorre sopra o sotto P è sufficiente trovare un suo punto. Da $y(0) = 0$ si deduce che il ramo scorre sotto la parabola, inoltre il sistema:

$$\begin{cases} \boldsymbol{y = \frac{x^3}{x-1}} \\ \boldsymbol{y = 0} \end{cases}$$

Ci dà tre soluzioni coincidenti $x_{1,2,3} = 0$ sull'asse x e quindi l'origine è un punto di flesso orizzontale.



A destra della retta x=1 il ramo potrebbe scorrere sopra o sotto la parabola, ma il ramo sottostante avrebbe 4 intersezioni con varie rette, compreso l’asse x, quindi l’unico ramo di C possibile è il maggiorante P.



Che bello!

Ricordo ancora un’esclamazione, nel silenzio profondo di una quinta, una ventina di anni fa:

“Che bello!”

Oggi quel ragazzo è ingegnere elettronico.

Come si vede con pochi passi e calcoli elementari si arriva ad una bozza molto precisa della curva. Tra l’altro la divisione è necessaria anche per il calcolo della primitiva della funzione. E’ brutto, di fronte a funzioni semplici come questa, vedere studenti, con altre impostazioni, che perdono tempo a cercare l’**asintoto obliquo**, negandone poi l’esistenza, solo perché tale ricerca fa parte del loro menù standard. La bozza dà l’andamento esatto del grafico, per cui i caratteri della derivata prima sono già previsti: vanno solo particolareggiati.

Per quanto riguarda lo studio dei segni, è più economico lo studio del segno dello **scarto** curva-asintoto (nel nostro caso $\frac{1}{x-1}$) che ci dice dove la curva è maggiorante o minorante la parabola e dove eventualmente la interseca (quando si annulla) che lo studio tradizionale del segno di *f(x)*. E' più utile sapere dove la curva maggiora o minora l'asintoto che dove maggiora o minora l'asse *x.*