Diesse forma e innova: Team work

IL CANTIERE DELLE SCIENZE

Lingua e linguaggi nell'insegnamento / apprendimento delle scienze

RESPONSABILI: Nadia Correale e Villi Demaldè

La matematica come linguaggio della scienza

Marco Bramanti

La matematica come linguaggio della scienza

Intervento in occasione della Convention Scuola 2016 di DIESSE, Team Work “Il cantiere delle scienze” sul tema “Lingua e linguaggi nell’insegnamento / apprendimento delle scienze”

Marco Bramanti Ottobre 2016

Vogliamo discutere il tema del linguaggio matematico nel suo nesso con le scienze, in particolare per quanto riguarda l’insegnamento scolastico. Diciamo subito che questo nesso (se facciamo riferimento alle scienze insegnate a scuola) riguarda principalmente la fisica, quindi questo intervento nei suoi aspetti di contenuto riguarda principalmente l’insegnamento di matematica e fisica nella scuola secondaria di secondo grado. Ho scelto perciò di mantenere il discorso il più possibile su un livello metodologico generale, nella speranza che queste riflessioni possano dare qualche spunto utile anche agli insegnanti di scienze nella secondaria di primo e secondo grado.

Per impostare la questione partiamo da qualche autorevole affermazione sul rapporto tra matematica e scienze.

> “La cosa strana della fisica è anche per formulare le leggi fondamentali abbiamo bisogno della matematica. (...) Più investighiamo, più leggi troviamo, più profondamente penetriamo la natura, più la malattia persiste: ognuna delle nostre leggi è un’affermazione puramente matematica. (...) Voi mi potreste dire: “ Perché non dirla a parole invece che a simboli? La matematica è solo un linguaggio, e noi vogliamo poterlo tradurre”. (...) Ma io non credo che sia possibile, perché la matematica non è semplicemente un’altra lingua. La matematica è un linguaggio più il ragionamento; un linguaggio più la logica, cioè uno strumento per ragionare. In effetti è una grande raccolta dei risultati dell’attento ragionamento di varie persone. Per mezzo di essa è possibile collegare un’affermazione a un’altra”.
>
> R. Feynman, [F], pp.43-4.
>
> “E’ noto che lo studio matematico della natura ha avuto inizio nell’ambito dei fenomeni del moto (la meccanica) e, più in generale, dei fenomeni fisici. La matematica irruppe in questo contesto non come un semplice strumento pratico e ausiliario rispetto a degli obbiettivi fondamentali della fisica che sarebbero stati definiti indipendentemente da esso. Nella formazione della meccanica, e più in generale della fisica, la matematica ha avuto un ruolo *costitutivo*.”
>
> G. Israel, [I], p. XI.

In questi passi si afferma dunque: *la relazione tra linguaggio matematico e scienza moderna non è accessoria; senza linguaggio matematico, la scienza moderna non esiste*.

Cercheremo di documentare che è proprio così, ma anche di capire meglio *perché* è così. Cercheremo anche di capire se, oltre al ruolo strumentale del linguaggio matematico rispetto alla scienza, ci sia una analogia, pur con le differenze, tra metodo matematico e metodo della scienza moderna. Scopriremo che è così e che in qualche modo la matematica (che esisteva in forma matura già 2000 anni prima di Galilei) ha insegnato alla scienza moderna qualcosa di profondo che sta al cuore del metodo scientifico.

1. Il metodo scientifico e l'astrazione

Parto dall'analizzare il metodo della scienza galileiana. Utilizzo per questo l'analisi fatta da Paolo Musso nel suo saggio "La scienza e l'idea di ragione" [Mu]. Nel §1.13 "La definizione del metodo scientifico", l'autore presenta in una sintesi significativa in 4 punti l'essenza del metodo scientifico così come viene concepito e fondato da Galileo:

1) Il passaggio dal "tentar di penetrare l'essenza vera ed intrinseca delle sostanze naturali" all'accontentarsi di "venire in possesso di talune loro affezioni", capovolgimento della scienza greca "a priori".

2) Le "sensate esperienze", ossia gli esperimenti mirati, contrapposti alla pura e semplice osservazione.

3) Le "dimostrazioni matematiche".

4) Il rifiuto del principio di autorità, conseguenza naturale dei 3 punti precedenti.

Quindi: la scienza moderna nasce con un'operazione di autolimitazione: solo accettando di non occuparsi della realtà in toto, ma di certe specifiche proprietà (quelle che oggi chiamiamo appunto "grandezze fisiche") si riesce a fare un discorso scientifico efficace. Questa limitazione è molto più che un generico "limitarsi alla realtà fisica": anche guardando una specifica "cosa" materiale, lo scienziato moderno osserva sempre pochi aspetti per volta (la massa, la velocità, la temperatura, la carica elettrica,...), facendo astrazione da quanto non è sotto esame in quel momento. *L'oggetto dell'indagine scientifica è sempre* (a dispetto della sua materialità) *in un certo senso un oggetto astratto*.

Secondo il linguaggio del filosofo Evandro Agazzi [A], *l'oggetto scientifico è ottenuto dallo scienziato ritagliandolo nella "cosa", secondo un particolare punto di vista*. Ad esempio: in un esperimento meccanico, di un mattone che scivola su un piano inclinato osservo le dimensioni, il peso, la superficie più o meno ruvida, ma difficilmente osservo la temperatura, la carica elettrostatica, per non parlare del colore, dell'odore, ecc. (tutte proprietà fisiche!). Di questo oggetto astratto si osservano alcune grandezze fisiche, pronte per essere descritte matematicamente. Il passaggio dall' *esperienza* (osservazione di quanto accade in natura, in circostanze non create o volute da noi) all'*esperimento* (osservazione di quanto accade in laboratorio, in circostanze create e organizzate ad hoc da noi per includere certi fattori ed escluderne altri) è funzionale a questo passaggio dalla "cosa" reale all'oggetto dell'indagine scientifica. La scienza dunque: delimita nella realtà il campo della propria indagine; ritaglia nella cosa l'oggetto di indagine, secondo un punto di vista particolare; studia oggetti astratti dalla realtà, pronti per essere descritti matematicamente.

C'è molta astrazione nella fisica, e non solo in quella moderna e oggettivamente molto sofisticata[1], anche in quella più basica:

- oggetti astratti (es. cosa vuol dire "punto materiale"?)

[1] Ad esempio in meccanica quantistica il concetto stesso di "grandezza fisica osservabile" è definito mediante un concetto di analisi funzionale astratta (operatore autoaggiunto su uno spazio di Hilbert).

- concetti astratti (es. cosa vuol dire “forza”? E’ un concetto matematico astratto che entra come intermediario logico[2] nelle leggi fisiche per tradurre la nostra idea di causalità; noi però osserviamo gli effetti delle forze, non le forze)

- situazioni astratte (es. “assenza di attrito”, “caduta nel vuoto”, “moto rettilineo uniforme”)

Dunque lo sguardo scientifico sul mondo osserva la realtà ma al tempo stesso fa molta astrazione dalla e nella realtà. Uno dei prodotti di questa astrazione è l’individuazione, “estrazione”, “distillazione”, dalla realtà complessa, di alcune grandezze fisiche, pronte per essere misurate, cioè tradotte in numeri.
Dal punto di vista didattico, all’inizio dello studio della fisica (nel percorso personale dello studente così come è stato nella storia), un problema di base è quello della delimitazione degli ambiti, della definizione dei propri oggetti; della chiarificazione di che cosa stiamo parlando: gli oggetti, le situazioni e i concetti astratti, nel senso che abbiamo spiegato. Astratti, cioè costruiti sì a partire dalla realtà, ma spogliando la realtà di tutte le proprietà tranne pochissime su cui concentriamo l’attenzione. Si fa una gran fatica a insegnare e studiare queste cose, perché mentre si dice che si sta studiando la realtà, si parla di qualcosa che è molto lontano, se non a volte in apparente contraddizione, con l’esperienza quotidiana. Questo fatto non va nascosto, come se fosse un incidente di percorso. Occorre affrontare di petto questo problema: non si capisce la scienza moderna se non si capisce che parla di oggetti astratti. Ma allora non parla della realtà? Certo che ne parla, ma la realtà è complessa, e la storia ci ha insegnato che se vogliamo arrivare a capire la realtà complessa dobbiamo avere l’umiltà di partire dalle realtà più semplici, dai mattoni di base, dalle leggi di base, dai princìpi elementari, e questo significa fare molta astrazione rispetto al flusso della realtà fisica così come ci investe nell’esperienza. Occorre accettare quindi con umiltà questa idea di un percorso necessariamente lungo e graduale, che parte osservando la realtà con un occhio critico che sa idealmente “sottrarre tutto tranne pochissimi elementi” alla realtà, per concentrarsi di volta in volta su un certo essenziale. *Si osserva con gli occhi e con molto ragionamento.* Da questo punto di vista, mostrare in laboratorio delle esperienze (o filmati di esperienze, almeno!) in cui, grazie agli apparecchi e accorgimenti possibili in laboratorio, si creano quelle situazioni controllate di cui si parla nelle idealizzazioni dei libri di testo, è utile per convincere che quelle “astrazioni” sono reali, hanno rapporto con la realtà. E’ interessante anche commentare gli accorgimenti che si usano in laboratorio (ad es. per ridurre l’attrito), per mostrare come questo sia l’esito di un lavoro creativo umano, e non si finisca invece per pensare che il laboratorio è una specie di universo parallelo virtuale in cui succedono cose che “nel mondo reale” (dell’esperienza quotidiana) semplicemente non accadono.

[2] Spieghiamo quest’idea della forza come concetto intermediario logico (si veda [J] per una discussione approfondita su questo tema). Ad esempio: la legge di gravitazione universale assegna la forza $F=Gm_1m_2/r^2$ che il Sole esercita sulla Terra, note le masse di Terra, Sole e la distanza tra i due; la seconda legge della dinamica $F=ma$ assegna l’accelerazione di un corpo, nota la forza che agisce su di essa, e la sua massa; combinando le due leggi come tessere di domino, $m_1a=Gm_1m_2/r^2$, possiamo calcolare l’accelerazione della Terra attratta dal Sole. Alla fine rimane la descrizione del moto e il concetto di forza scompare. Ma noi ne abbiamo bisogno per dare alla teoria una struttura logica e al tempo stesso intuitiva, in cui sia soddisfatta non solo l’esigenza di previsione quantitativa, ma la nostra esigenza di interpretazione del fenomeno in termini di causa / effetto, un concetto che di per sé non ha spazio nelle equazioni matematiche.

2. Il ruolo costitutivo della matematica nella scienza moderna

Si dice che la fisica studia, nella realtà, tutto ciò che è misurabile. Le grandezze fisiche vengono misurate, quindi tradotte in numeri (o vettori, o altro; il punto è: tradotte in grandezze matematiche). La massa di un oggetto non è un numero, è una proprietà fisica di quell'oggetto; ma una volta misurata è tradotta da un numero, pronto per essere inserito in ulteriori calcoli ed equazioni. La misurazione è la porta d'ingresso della realtà nella fisica; attraversata quella porta, la grandezza fisica è identificata con una grandezza matematica. E finché la realtà non attraversa quella porta, il gioco della scienza non può cominciare.

Osserviamo anche che mentre le *grandezze fondamentali* (tempo, lunghezza, massa, temperatura...) possono essere misurate, le *grandezze derivate* vengono *calcolate* a partire da grandezze primitive: velocità media = spazio / tempo; densità = massa / volume, ecc. Notiamo che queste grandezze addirittura non potrebbero essere *definite* senza matematica.

Facendo un passo ulteriore, osserviamo che certe grandezze derivate sono definite con *procedimenti matematici complessi*. La velocità istantanea è *la derivata della funzione* "spazio percorso in funzione del tempo". Questo non è un esempio qualsiasi: la scienza moderna nasce con Galilei, ma matura con Newton, che le dà una forma più moderna grazie alla matematica che utilizza, il calcolo differenziale e integrale (e non solo). Senza quella rivoluzione matematica che a fine 1600 viene compiuta con la nascita del calcolo infinitesimale, la scienza moderna sarebbe rimasta bambina. Addirittura, quindi, la scienza moderna non potrebbe esistere senza *una certa* matematica[3].

Il fatto che le grandezze fisiche siano tradotte in grandezze matematiche è il presupposto dell'osservazione di Feynman da cui siamo partiti: ogni legge fisica è formulata in ultima analisi come relazione matematica (di solito un'equazione) tra grandezze fisiche (quelle che gli studenti chiamano "formule"). Non esiste altro linguaggio. Occasionalmente, le leggi possono essere talmente semplici come enunciati (magari perché sono i più profondi, come il principio di inerzia) da poter essere formulate anche in modo puramente discorsivo, ma anche in questi casi basta poco a rendersi conto che questa è solo una scelta espositiva: la sostanza delle relazioni affermate ha la sua espressione naturale col linguaggio matematico.

Dovrebbe risultare evidente ora la verità dell'affermazione di Israel da cui siamo partiti: la matematica non si inserisce come uno strumento in più nello sviluppo della scienza moderna, come se questa preesistesse; al contrario, la matematica gioca un ruolo *costitutivo* nella scienza moderna. Attenzione: non stiamo dicendo con queste affermazioni che la fisica *si riduce* alla matematica, che la fisica è *solo* matematica. Stiamo dicendo che la matematica è un organo vitale dell'organismo che chiamiamo fisica, senza il quale l'organismo non può neppure nascere.

[3] L'importanza della matematica "moderna" si vede in realtà già parlando dei concetti fisici più elementari. La velocità media che per noi è definita semplicemente come rapporto (spazio percorso) / (tempo impiegato), per Galilei non poteva essere definita così (e doveva essere interpretata come una nuova grandezza primitiva) perché nella matematica Galileiana, che è ancora quella classica, greca, non è possibile fare il rapporto di grandezze non omogenee, quindi non ha senso il rapporto [spazio : tempo]. Per una discussione di questo fatto si veda l'Introduzione a cura di E. Giusti all'opera di Galilei, in [GG].

Che poi la necessità di insegnare certi concetti ad allievi che non possiedono ancora la matematica necessaria possa indurre l'attitudine ai "giri di parole" (per evitare il più possibile la matematica) , questa è un'altra questione, ma dobbiamo arrenderci la realtà: il linguaggio naturale della scienza moderna è la matematica, anzi *una certa* matematica, quella da Newton in poi.

Facciamo un passo indietro, per evitare fraintendimenti. Come la fisica non si riduce alla matematica, così una grandezza fisica non coincide con la grandezza matematica che la traduce. Ogni definizione operativa traduce in modo formale un'idea intuitiva, esperienziale, preesistente. *Dal punto di vista didattico* è fondamentale tenere logicamente distinti i due momenti: il significato intuitivo/esperienziale di una grandezza fisica (velocità, densità, lavoro...) e la sua definizione operativa, "matematica". Analogamente, le leggi fisiche hanno un contenuto intuitivo che va oltre l'aspetto formale, ad esempio il fatto di attribuire un senso di causa-effetto a ciò che dal punto di vista matematico è tradotto da un'equazione, che si può leggere in due sensi diversi ma logicamente equivalenti.

Un possibile equivoco sulla formalizzazione matematica delle leggi fisiche. Certi studenti, apparentemente, accettano di buon grado la matematizzazione delle scienze: "per questo argomento basta sapere 3 formule". Di solito chi la pensa così non trionfa nelle verifiche. L'equivoco è che *ricordare una formula sia abbastanza per saperla usare*. Sarebbe come dire che sapere com'è fatta un'automobile equivale a saper guidare. La formula è la sintesi di un percorso razionale, un punto d'arrivo che non consente di buttar via tutto ciò che viene prima. Una formula non spiega da sé come vada usata. Ad esempio, come si usa F=ma? L'uguaglianza, con la sua simmetria, nasconde i ruoli di "causa" e "effetto": solitamente si conosce la forza e si usa la formula per calcolare l'accelerazione, nota la massa. E questo non sta scritto nella formula, ma è parte di ciò che va insegnato attorno alla formula. (In matematica, il segno di = esprime una relazione simmetrica. Ma, perfino in matematica, quando si dice che $a=b$ raramente i termini a e b giocano un ruolo totalmente simmetrico; di solito l'uguaglianza esprime il punto di arrivo di un percorso che ha un *verso*: da a verso b. Dico questo per ribadire che, perfino nella matematica astratta, la formula non dice tutto di se stessa; c'è sempre un discorso che le conferisce significato. Tanto più questo sarà vero quando le equazioni parlano più direttamente della realtà fisica). Perciò, a scanso di equivoci, la mia sottolineatura del ruolo del linguaggio matematico nelle scienze non significa affatto che io auspichi un modo formalista di insegnare le scienze: il discorso scientifico non è sostituito dalle formule, anche se certamente ha nelle formule dei momenti alti di sintesi potente.

3. Astrazione e universalità, in matematica e in fisica

Fermiamoci ora per un momento in questa analisi del metodo scientifico e della matematizzazione della fisica, e passiamo a considerare il metodo della matematica in se stessa. In seguito potremo così notare un profondo punto di contatto tra i due metodi. Utilizziamo un semplice "esempio guida" per le nostre osservazioni, il caro vecchio teorema di Pitagora: "In un triangolo rettangolo, il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti". Per quello che mi interessa osservare bastano le prime parole: "In un triangolo rettangolo...". Cosa vuol dire? Significa "In un qualsiasi triangolo rettangolo..." e quanti sono i triangoli rettangoli? Infiniti. Il teorema parla di infiniti triangoli rettangoli. E afferma che in uno qualsiasi di questi vale una certa proprietà. Ogni volta che vale l'ipotesi (il triangolo è rettangolo) vale la tesi (il quadrato dell'ipotenusa è...). Dunque il teorema di Pitagora contiene infinite affermazioni. E come facciamo a sapere che è vero? Perché ne conosciamo una dimostrazione. La sua dimostrazione ci convince oltre ogni ragionevole dubbio che il teorema vale. Riflettiamo sulla potenza del metodo matematico: con un numero finito di passi del ragionamento ci convince della verità di infinite proprietà. Come è possibile? Certamente non esaminando uno per uno gli infiniti triangoli rettangoli esistenti e constatando che la proprietà è vera: non finiremmo mai. Il metodo matematico non è la constatazione caso per caso, ma la dimostrazione, che raggiunge l'universalità che sarebbe impossibile col primo metodo. Come procede la dimostrazione? Si considera un generico triangolo rettangolo, e si mostra che necessariamente il quadrato costruito sull'ipotenusa ha certe proprietà. La chiave di tutto è in quel "si considera un generico triangolo rettangolo". Cosa vuol dire? Non che se ne prende a caso uno particolare e si lavora con quello, ma che si fa un ragionamento in cui ogni passo si appoggia solo sulla definizione di triangolo rettangolo (o sulle conseguenze logiche di questa definizione), cioè sulle proprietà che valgono per ciascun triangolo rettangolo, indipendentemente da quale abbiamo scelto. Ma questo è possibile perché "triangolo rettangolo" è un concetto astratto, definito da poche proprietà. La genericità è resa possibile dall'astrazione dell'oggetto di cui si parla. Non è possibile considerare "un cavallo generico", ma è possibile considerare "un triangolo rettangolo generico", cioè ragionare a partire dalla sua definizione. Quindi: la potenza del metodo dimostrativo matematico, che è l'arma specifica, caratteristica, di quel metodo di conoscenza che chiamiamo matematica, consiste nella capacità di ottenere verità universali (cioè riguardanti infiniti oggetti) in modo unanimemente condiviso; e questo è reso possibile dalla natura astratta dei suoi oggetti. *L'astrazione degli oggetti matematici rende possibile un ragionamento dalle conclusioni universali*.

Dopo questa digressione sul metodo matematico, possiamo ora tornare al metodo scientifico. Cosa fa lo scienziato quando, mediante riflessione, esperimenti e dimostrazioni, stabilisce una nuova legge fisica? Stabilisce (o almeno: ambisce a stabilire) una verità universale, di nuovo: una verità che riguarda infiniti oggetti o fenomeni. La legge di gravitazione universale non serve a dirci che fino ad oggi le mele sono cadute in un certo modo, pretende di dirci che cadranno così anche domani. Il punto è: come fa lo scienziato a stabilire che è così? Se si trattasse di moltiplicare indefinitamente le constatazioni delle regolarità di fatto, non finiremmo mai di constatare, e non potremmo mai concludere nulla di universale, come già osservava criticamente Popper: "Per quanti cigni bianchi io abbia visto, non potrò mai dire che tutti i cigni sono bianchi". Lui (implicitamente) riteneva che la scienza non abbia altre armi rispetto all'indefinita ripetizione dell'esperienza del constatare regolarità di natura, e ne concludeva l' impossibilità di stabilire qualunque legge universale. (Ogni affermazione scientifica è eternamente falsificabile). Io credo che la pratica scientifica consista in ben altro rispetto a questa iterata constatazione. Riflettiamo sulla tecnica dell'*esperimento*. Ha una profonda analogia con il metodo della dimostrazione matematica: non si considerano uno per uno tutti i triangoli rettangoli, si considera il triangolo rettangolo generico. Cosa fa uno sperimentatore? Non considera uno per uno tutti i possibili pesi che possono scivolare su un piano inclinato, considera un peso generico. Questo non è possibile nello stesso senso in cui è possibile in matematica, tuttavia le condizioni controllate di laboratorio (eliminare gli elementi di disturbo, ridurre per quanto possibile l'oggetto reale a oggetto astratto caratterizzato da poche grandezze fisiche significative) e la ripetizione delle prove in modo limitato ma con una variazione mirata e significativa dei parametri in gioco, cercano di ricreare le *condizioni di genericità* , cercano di approssimare nella realtà il concetto di "oggetto generico".

Il metodo della scienza moderna cerca quindi di stabilire leggi universali con un metodo che ha una profonda analogia (non dico identità, sia chiaro) con il metodo dimostrativo matematico: lavorando con oggetti "resi astratti" dal punto di vista scientifico sulla realtà, cerca di approssimare il concetto di “oggetto generico” per tentare una dimostrazione generale dei propri asserti, che ambiscono ad essere “implicazioni universali” un po’ come i teoremi matematici. Di nuovo, *l’astrazione degli oggetti rende possibile un ragionamento di conclusioni universali*. Per la matematica come per la scienza, possiamo dire che *l’astrazione è un vero punto di forza, che consente di raggiungere l’universalità nelle proprie conclusioni* . Nel caso della scienza, che ambisce a descrivere e comprendere la realtà fisica, questo è un apparente paradosso: *per comprendere la realtà, dobbiamo a volte allontanarci da molta realtà, e concentrarci solo su pochi aspetti*. Ma questo metodo è un ingrediente non secondario della lezione di Galileo.

Nota sull’astrazione. Si dice spesso che la matematica è difficile perché è astratta, e lo stesso si potrebbe dire delle materie scientifiche, non appena si affrontino in modo un po’ serio. In un certo senso è vero. Il problema è quale conseguenza vogliamo trarre. Non si può togliere l’astrazione dalla matematica per renderla più semplice. Occorre piuttosto pensare che la matematica è anche un’occasione, un’opportunità, di educare la capacità di astrazione, che è una delle armi più potenti della nostra ragione. Tutto va ovviamente commisurato all’età dello studente, ma il punto di vista va capovolto: non si può solo aspettare che un certo grado di astrazione si sviluppi (non si sa come) prima di fare certi discorsi, occorre anche fare certi discorsi perché si sviluppi un certo grado di astrazione.

4. Insegnare una disciplina, insegnare cos’è una disciplina

Un’osservazione generale. Credo che qualsiasi insegnante, se è appassionato alla sua disciplina, insegnando a qualsiasi livello non vuole trasmettere solo un po’ di quella disciplina (cioè: alcuni contenuti della disciplina stessa), ma vuole anche insegnare un po’ di *cos’è* quella disciplina, quali sono i suoi obiettivi e metodi caratteristici. Nell’insegnamento noi vogliamo dare delle chiavi di lettura *della realtà* e delle chiavi di lettura *della cultura*. Avere un atlante mentale in cui una persona sa cos’è (cioè: ha qualche idea corretta su che cos’è) la biologia, cos’è la matematica, cos’è l’economia, ecc. non è poco. Per la matematica e le scienze: se uno studente di liceo ha già deciso che all’università farà giurisprudenza o lettere, cosa gli serve studiare matematica, fisica, chimica...? Forse certe nozioni, certi contenuti specifici, gli serviranno poco, ma se diventa grande avendo qualche idea corretta su cos’è la scienza e cos’è la matematica, questo è apprezzabile: è un atlante mentale che gli darà una maggior capacità di comprensione e di rapporto con persone e aree della cultura lontane dalla sua. Se poi trattiene criticamente anche certi contenuti, avrà una chiave di lettura in più della realtà attorno a sé.

Se, allora, abbiamo compreso che la matematica gioca un ruolo costitutivo nella scienza moderna, comunicare questo aspetto, documentare, esemplificare la relazione tra matematica e fisica diventa un obiettivo rilevante dell’insegnamento sia della matematica che della fisica. Questa è una delle “grandi idee di fondo” da passare (non dico l’unica o la più importante, ma *una di quelle importanti*). Approfondiamo perché è importante comunicare quest’idea:

- Perché spiega meglio *cos’è* la scienza e cos’è la matematica (il ruolo *costitutivo* di cui abbiamo parlato).

- Perché è una motivazione forte allo studio della matematica (e quanto c'è bisogno di motivazioni nello studio della matematica!). Notiamo esplicitamente che tutta la matematica delle scuole superiori ha "utilità pratica" in vista delle scienze, non in vista della "vita quotidiana", come invece si può ancora dire per la matematica della scuola elementare e media; certamente l'utilità non è tutto, nell'insegnamento della matematica come di ogni altra disciplina, ma indubbiamente è una motivazione.

- Perché fa capire meglio sia la matematica che la fisica, aiuta a rendere lo studio di entrambe più ragionato, meno meccanico, meno mnemonico.

5. Il linguaggio matematico come portatore di conoscenza scientifica

Abbiamo visto che l'oggetto fisico è descritto da alcune grandezze fisiche, che a loro volta sono descritte da grandezze matematiche o addirittura definite mediante procedimenti matematici; queste grandezze matematiche poi entrano nelle relazioni (di solito si tratta di *equazioni*) che esprimono relazioni fisiche o leggi fisiche. A questo punto la matematica scende in campo con la propria capacità di deduzione o elaborazione: sappiamo che le equazioni possono essere combinate ottenendone di nuove: per via puramente matematica otteniamo così delle conclusioni aventi significato fisico. La scienza, diceva Galilei, procede attraverso "Sensate esperienze e matematiche dimostrazioni". Queste sono le due gambe attraverso cui la conoscenza scientifica procede. E' importante cogliere il valore di questo aspetto, perciò vediamone alcune sfaccettature. Anzitutto: quello che viene chiamato "linguaggio matematico" (a volte con un intento intenzionalmente riduttivo, come se la matematica fosse solo "un altro modo di dire le cose") è molto più di questo (come diceva Feynman nella frase da cui siamo partiti). La matematica è un metodo di conoscenza; una deduzione logica, nella misura in cui ci fa pervenire a una conclusione di cui non eravamo già consapevoli, aumenta effettivamente la nostra conoscenza. Il fatto che la conclusione fosse "implicita" nelle premesse non toglie il fatto che senza il lavoro dimostrativo non sarebbe emersa alla nostra consapevolezza; perciò la conoscenza è aumentata[4]. Si può anche dire: il linguaggio matematico è un modo sintetico di dire le cose, che incorpora in sé a volte secoli di pensiero e di progressi; perciò se una volta tradotto un problema verbale in linguaggio matematico questo appare banale, non vuol dire che era già banale prima: vuol dire che la matematica è potente[5]. Quando questo metodo deduttivo viene applicato a premesse aventi contenuto fisico, la conclusione fa aumentare le nostre conoscenze fisiche. La matematica è quindi uno dei metodi (non l'unico, certo!) con cui aumenta la conoscenza scientifica. Gli altri sono l'esperimento e la riflessione (attorno a esperimenti, fenomeni, teorie, deduzioni…).

Se siamo consapevoli di questo, e se nell'insegnamento scientifico vogliamo, come si diceva, non solo comunicare un po' di scienza, ma anche comunicare un po' di che cos'è la scienza, significa che nell'insegnamento delle scienze a scuola dovranno trovare posto "Sensate esperienze e matematiche dimostrazioni". A scuola occorre mostrare entrambe le cose. Mostrare qualche significativa deduzione matematica di nuove leggi fisiche a partire da altre già accettate è istruttivo e esemplare *tanto quanto* mostrare in laboratorio qualche esperimento significativo che vada alla

[4] Su questo tema, si veda [B1].
[5] Per un approfondimento e una documentazione di questa tesi rimando a [B2]

radice delle leggi fisiche che si stabiliscono dall'osservazione sperimentale. Occorre anche curare, nell'insegnamento, la distinzione di "status logico " delle varie affermazioni che si fanno: quest'affermazione scientifica è vera perché si osserva sperimentalmente che è così, oppure perché si dimostra matematicamente che è così (a partire da altre cose osservate sperimentalmente)? O ancora è un principio che si pone a fondamento della teoria arrivandoci attraverso ragionamento sull'esperienza e "esperimenti ideali"? Distinguere i diversi piani e ruoli delle affermazioni scientifiche che si fanno è didatticamente fondamentale, per stimolare il senso critico nello studio delle scienze.

Naturalmente, quale matematica si ha a disposizione influenza molto la facilità delle deduzioni e di conseguenza anche la capacità di sintesi che dà sulla teoria fisica. Questo è vero storicamente, prima ancora che nell'insegnamento. Prendiamo un fenomeno semplice come il moto rettilineo uniforme. Con la matematica usata da Newton in poi, basata su *funzioni* ed *equazioni*, tutto è scritto nell'equazione $s = vt$, che possiamo ovviamente anche rigirare ricavando v o t in funzione delle altre variabili; nella matematica di Galilei, tutta basata sulla teoria delle proporzioni e sul concetto tradizionale di grandezza fisica distinta dal numero, ogni relazione va stabilita con un ragionamento distinto, piuttosto pesante: si vedano i "Discorsi e dimostrazioni matematiche su due nuove scienze", dove Galilei dedica sei enunciati di teoremi a stabilire le relazioni, per noi ovvie, che seguono da $s=vt$, in un modo che, alla nostra sensibilità di oggi, sembra un "girare sempre intorno allo stesso punto".

Galilei, Discorsi e dimostrazioni…, Giornata Terza, sezione "Del Moto Equabile". Qui troviamo le seguenti: Proposizione 1. Se un mobile, dotato di moto equabile, percorre due spazi con una stessa velocità, i tempi dei moti staranno tra di loro come gli spazi percorsi.
Proposizione 2. Se un mobile percorre due spazi in tempi eguali, quegli spazi staranno tra loro come le velocità. E se gli spazi stanno tra loro come le velocità, i tempi saranno eguali.
Proposizione 3. Se il medesimo spazio viene percorso con velocità diseguali, i tempi dei moti rispondono contrariamente [sono inversamente proporzionali] alle velocità.
Proposizione 4. Se due mobili si muovono di moto equabile, ma con diseguale velocità, gli spazi percorsi da essi in tempi diseguali avranno tra di loro una proporzione composta della proporzione tra le velocità e della proporzione tra i tempi.
Proposizione 5. Se due mobili si muovono di moto equabile, ma le loro velocità sono diseguali e diseguali gli spazi percorsi, la proporzione tra i tempi risulterà composta della proporzione tra gli spazi e della proporzione tra le velocità permutatamente prese [proporzione inversa delle velocità].
Proposizione 6. Se due mobili si muovono di moto equabile, la proporzione tra le loro velocità risulterà composta della proporzione tra gli spazi percorsi e della proporzione tra i tempi permutatamente presi [proporzione inversa dei tempi].

Analogamente, spostandoci più avanti nel percorso, ci sono deduzioni che risultano "naturali" utilizzando il calcolo differenziale o integrale, altrimenti risultano impossibili o artificiose e pesanti, e così via. Questo pone il problema, su cui ritorneremo, della pianificazione coordinata dell'insegnamento della matematica e delle scienze.

Nota: L'esempio di Galilei mi suggerisce anche la seguente osservazione didattica. Nell'insegnamento scolastico della matematica e della fisica spesso troviamo un attaccamento tradizionale al punto di vista della matematica antica, che in questo contesto possiamo chiamare Galileiana: dire che il moto uniforme è quello in cui un corpo percorre spazi uguali in tempi uguali è retaggio della matematica Galileiana in cui non si può fare rapporto tra spazio e tempo (e dire quindi che questo rapporto è costante), perché spazio e tempo non sono grandezze omogenee; enunciare il teorema di Pitagora dicendo che il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti e non dicendo che il quadrato dell'ipotenusa è uguale alla somma dei quadrati dei cateti è retaggio di una matematica antica che non conosce i numeri irrazionali e perciò non può permettersi di identificare lunghezze e aree con numeri reali. Ne siamo consapevoli? Abbiamo delle ragioni forti per insistere su questo linguaggio antico? Si rifletta sul fatto che, in altri contesti scolastici ugualmente “tradizionali”, ignoriamo questi stessi problemi: ad esempio, tutta la geometria analitica è *fondata* sull’identificazione tra segmenti e numeri reali, e quando siamo in quel contesto noi compiamo questa identificazione senza pensarci nemmeno.

Abbiamo riflettuto sul ruolo della matematica nel farci dedurre certe conoscenze fisiche da altre, “giocando con le equazioni”. Facciamo ora un’osservazione complementare. La potenza deduttiva della matematica applicata alla fisica emerge già *quando si introduce una nuova definizione*. Ad esempio: quando si introduce il concetto di forza e si dice che è un vettore, si ricorda che questo significa che ha una direzione, un verso, un’intensità (a volte si aggiunge il punto di applicazione), e fin qui siamo nel campo di osservazioni abbastanza naturali. Ma i vettori sono oggetti matematici dotati di certe proprietà, ad esempio si sommano come vettori, cioè con la regola del parallelogramma. Quindi dire “le forze sono vettori ” *significa anche* affermare che “le forze si sommano secondo la regola del parallelogramma”, e questa evidentemente è un’affermazione attorno alla realtà fisica, *che rimane implicita nella definizione matematica*. Andrebbe esplicitata, chiarendo la status logico di quest’affermazione. A rigore, non posso dire che le forze si sommano come vettori perché sono vettori: chi ha deciso che sono vettori? Viceversa, sono vettori perché oltre ad avere direzione, verso e intensità, si sommano come vettori[6]. Però è vero che ogni volta che una grandezza fisica ha una direzione, un verso e un’intensità, chi sa la matematica pensa “dunque (probabilmente) è una grandezza vettoriale” e si dovrebbe chiedere “vediamo se si sommano anche come vettori queste grandezze”. La matematica aiuta a porsi le domande giuste.

6. La progettazione del percorso di insegnamento

Il fatto che mostrare il ruolo della matematica nelle scienze sia riconosciuto come un obiettivo importante, implica che in vista di questo obiettivo vanno anche fatte, orientate, subordinate altre scelte didattiche.

Una prima conseguenza è che è necessaria una progettazione coordinata dei percorsi di insegnamento di matematica e fisica. Quest’affermazione sembra ovvia, ma non è sempre realizzata, perché ad essa si oppongono altre esigenze didattiche, di per sé legittime. Nell’insegnamento della matematica, la scuola italiana ha una tradizione di sistematicità (nel seguente senso: quando si apre un argomento, non ci si sposta da quello finché non si è esaurito quello che è in programma dire sull’argomento stesso) che si sposa male con la fruibilità della matematica in altre discipline. Subordinare le scelte di percorso didattico, nell’insegnamento di matematica e scienze, al mostrare l’utilizzo della matematica per deduzioni fisiche, implica una serie di scelte nella progettazione di entrambi i percorsi in cui l’esempio significativo, l’argomento esemplare, ha un’importanza a cui vale la pena di sacrificare la sistematicità a tutti i costi, l’organicità e la linearità del percorso a tutti i costi.

[6] Più precisamente, l’affermazione “forte” attorno alla realtà fisica viene fatta nel momento in cui, dopo aver già introdotto la legge fondamentale della dinamica F=ma, si rilegge questa dicendo che quando su un punto materiale agiscono più forze, il termine F va interpretato come *la risultante delle forze*, cioè come la loro *somma vettoriale*. Questa dal punto di vista logico è una nuova legge fisica, e come tale andrebbe presentata; è una legge giustificabile con l’esperienza, e non una conseguenza matematica della legge precedente.

Un esempio: tra la fine della scuola media e il biennio delle superiori si consuma la delicata introduzione dell'algebra, calcolo letterale, equazioni, ecc. Il tutto viene fornito con una certa sistematicità e con somministrazione di esercizi tecnicamente elaborati, con l'esito che i primi concetti elementari sulla manipolazione di un'*equazione di primo grado* vengono introdotti sempre troppo tardi, rispetto all'utilità che questi avrebbero già più precocemente, nel manipolare semplici formule in geometria (aree, volumi) o in scienze. C'è sempre un'età in cui allo studente è di fatto richiesto di saper "rigirare una formula" senza che nessuno gli abbia veramente spiegato come si fa e perché. Questo rischia di arrecare un danno permanente: si moltiplicano le cose che lo studente impara a memoria, si perde l'occasione di mostrare come la matematica sia d'aiuto e non d'inciampo, non si educa l'idea che "ragiona, e capirai come si fa". D'altro canto, l'insegnante dovrebbe accettare il fatto che insegnare a manipolare un'equazione ax=b non significa necessariamente aprire un periodo di vari mesi in cui si risolveranno equazioni di primo grado sempre più complicate. Per ciò che serve alla geometria e alle scienze, bastano davvero i primi concetti: ma quelli andrebbero dati presto e bene.

Un discorso analogo si può fare con i primi rudimenti di trigonometria, cioè l'utilizzo di seno e coseno per la risoluzione dei triangoli rettangoli e la proiezione di un vettore su due assi ortogonali. Cose che risultano ben presto utili, e che non implicano necessariamente mesi di permanenza sulle identità trigonometriche; quelle si possono rimandare.

Altro discorso va fatto per il calcolo differenziale, richiesto ora in tutti i licei, all'ultimo anno. Occorre ripensare i percorsi in vista degli obiettivi: in un liceo classico gli elementi di calcolo differenziale utili alla fisica di base e ai problemi di ottimizzazione (che sono le motivazioni per cui questi elementi sono stati introdotti nelle indicazioni ministeriali) non possono essere sviluppati *dopo* tutta la teoria dei limiti tradizionalmente sviluppata nei licei scientifici. La definizione di limite finito al finito dev'essere data per introdurre immediatamente la definizione di derivata, che è il vero protagonista del calcolo differenziale.

Questi sono solo pochi esempi, occorre realmente riprogettare le scansioni temporali dei singoli argomenti matematici anche in vista del loro utilizzo (una raccomandazione così ovvia e così disattesa).

Un'osservazione complementare è la seguente. Per quanto si cerchi di progettare percorsi sensati, rimane vero che la matematica che "servirebbe" per la fisica, ad ogni livello del percorso scolastico, è sempre di più di quella che si sa già: la prima lezione di cinematica richiederebbe già la derivata. Questo suggerisce, allora, di *considerare la possibilità di rivedere in una classe successiva un argomento più elementare di fisica, che solo ora – con la matematica ora a disposizione – può essere rivisitato con un certo valore aggiunto.* Del resto, nel percorso scolastico di altre materie (si pensi alla storia) non mancano certo gli esempi di "doppia passata" su uno stesso argomento.

Un esempio: di moto circolare uniforme e moto armonico si parla prima della quinta liceo, ma se in quinta liceo conosciamo le derivate delle funzioni seno e coseno, possiamo ritornare sulla matematica del moto armonico, ottenendo due scopi: una comprensione più sintetica, concettuale, del moto armonico; una motivazione in più sul perché in analisi si studiano le funzioni trigonometriche.

Altro esempio: rivisitare il concetto di lavoro dopo che si è parlato di integrale, e riottenere il lavoro come integrale della forza nello spostamento, in qualche caso di forza non costante. (Ad es. lavoro per allontanare un punto materiale in un campo gravitazionale).

Questo genere di rivisitazioni può essere apprezzato anche dallo studente a condizione che l'argomento studiato "in passato" sia percepito come "una cosa facile" e non come "una cosa dimenticata". Questa è una delle sfide dell'insegnamento delle materie scientifiche: far capire che, se lo studio è ragionato, l'apprendimento può essere cumulativo, anziché "cosa nuova imparata implica cosa vecchia dimenticata".

7. Esemplificazioni sulle scienze naturali

Il metodo scientifico e l'astrazione: gli oggetti di cui si occupa la scienza sono sempre in qualche misura astratti; per capire la realtà complessa si cerca di isolare le leggi fondamentali, che si capiscono in situazioni idealizzate, su oggetti idealizzati, facendo uso di concetti astratti.

Nello studio della chimica, si parte dall'atomo. Rispetto alle trasformazioni complesse che avvengono nel mondo della nostra esperienza, e che vorremmo capire, l'atomo è lontanissimo, in un certo senso è un'astrazione: è un oggetto reale di cui non possiamo però avere alcuna esperienza sensoriale diretta: non si vede e non si tocca. Eppure comprendendo le leggi di base dell'atomo possiamo comprendere i legami chimici, quindi le leggi fondamentali della chimica. Non sto affermando una posizione riduzionistica: è chiaro che non è tutto lì, che per comprendere fenomeni su altre scale di complessità bisognerà capire anche tante altre cose, ma il livello atomico non può essere saltato.

Ciò che Feynman dice parlando della legge di gravitazione universale (come esempio di una caratteristica delle leggi fisiche), "è semplice nel suo schema, anche se nelle sue effettive azioni è complicata" (v. [F], p.37), è vero un po' in tutti gli ambiti: la scienza cerca un ordine semplice che si rivela a livello delle leggi di base, che però agiscono con azioni effettivamente complesse. Per capire, è meglio non partire dal complesso ma dalle basi, che però sono in un certo senso lontane dall'esperienza ordinaria.

Analogamente, nello studio della biologia, si parte dalla cellula. Anche qui, rispetto al desiderio di comprendere ad esempio il funzionamento del corpo umano, lo studio della cellula è un punto lontanissimo. E in un certo senso è un'astrazione: una cellula non vive da sola, fuori da un organismo. E c'è l'ulteriore dilemma dell'osservazione "in vivo" o "in vitro" (per studiare bisogna osservare, per osservare bisogna estrarre dal contesto vivo, quindi si uccide e si altera ciò che si vorrebbe studiare). Anche questo è un oggetto di cui non abbiamo un'esperienza sensoriale diretta. Possiamo anche vederla al microscopio, ma non basta certo vederla per comprendere la funzione delle sue varie parti, i meccanismi cellulari. Ci sono voluti anche esperimenti mirati e modelli teorici.

Nell'insegnamento di tutte le scienze naturali, quindi, occorre trasmettere l'idea che per arrivare alla comprensione della realtà complessa bisogna astrarre, idealizzare, e concentrarsi su alcuni elementi fondamentali, in qualche modo astratti e lontani dall'esperienza quotidiana. Almeno per cominciare il percorso.

Il ruolo costitutivo della matematica nella scienza moderna. La matematica come portatrice di conoscenza scientifica. Molta della scienza attuale ha che fare con una realtà che ha poco a che fare con l'esperienza quotidiana. Pensiamo alla fisica dell'infinitamente piccolo che si fa al CERN, ma anche alla biologia molecolare, alle nanotecnologie, pensiamo all'astronomia e l'osservazione del cosmo, ma anche alla geologia che fa modelli sull'interno della terra. In tutti questi casi la scienza si occupa della *realtà*, di *oggetti reali*, sia chiaro, eppure sono realtà di cui non possiamo fare esperienza diretta, immediata. Come entriamo in rapporto con queste realtà? E' interessante, studiando (anche a livello scolastico) astronomia o geologia o biologia o chimica, chiederci: il libro dice che è così, ma come si fa a sapere che è così? In che modo si raggiungono queste conoscenze, con quali tecniche? Questo tra l'altro ha anche a che fare con l'aspetto dell'***insegnare cos'è una disciplina***, e non solo un po' dei suoi contenuti. Per sapere quel che sappiamo delle stelle non basta puntare il telescopio e guardare: ci sono apparecchiature che analizzano la radiazione che le stelle ci inviano: c'è molta teoria, molta astrazione, e molta matematica che permette di estrarre informazioni rilevanti da quell'osservazione che altrimenti sarebbe solo un piacevole spettacolo. Come sappiamo qualcosa sugli strati profondi del pianeta? Ad esempio dal modo in cui si riflettono le onde sismiche, e questo significa aver studiato in astratto la fisica matematica della propagazione delle onde, aver fatto modelli astratti e averli confrontati con i dati. Senza tutto questo, non potremmo dire nulla degli strati del pianeta dove non arrivano trivelle o canali vulcanici. Come datiamo un reperto antico o preistorico? Col metodo del carbonio-14, che si basa sulla comprensione dell'atomo, sul fenomeno del decadimento radioattivo, quindi su una fisica molto "fondamentale" e astratta, in un certo senso, molto matematica.

La matematica è quindi fondamentale per entrare in rapporto con la realtà fisica, tutte le volte che questo rapporto non può essere immediato, per la scala infinitamente piccola o grande della realtà in questione, o per l'inaccessibilità degli oggetti in questione. La matematica consente anche di esprimere certe caratteristiche importanti di queste realtà, che non potremmo neppure figurarci in base all'analogia con le nostre esperienze quotidiane: posso guardare il puntino di una stella nel cielo, ma questo è molto poco di ciò che la stella effettivamente è. Una descrizione scientifica della stella passa anche attraverso la specificazione di una serie di grandezze. La descrizione dei processi che avvengono in una stella richiede molta teoria astratta. Lo stesso vale per la struttura interna del pianeta terra e per molti altri oggetti dell'indagine scientifica.

Nell'insegnamento delle scienze mi sembra importante far osservare questi aspetti, far riflettere (per quanto possibile, per quanto non è troppo complicato) sui modi in cui certe conoscenze sono state acquisite, in modo da sottolineare qual è il tramite reale del nostro rapporto con certe realtà, la fonte reale di certe conoscenze.

Riferimenti bibliografici

[A] E. Agazzi: Temi e problemi di filosofia della fisica, Manfredi 1969.

[B1] M. Bramanti: Elogio dell’astrazione. L’interesse degli oggetti matematici. Parte I – Emmeciquadro n. 49, giugno 2013; parte II – Emmeciquadro n. 50, settembre 2013.

[B2] M. Bramanti: I linguaggi matematici: idee e simboli. Parte I –Emmeciquadro n. 42, agosto 2011; Parte II – Emmeciquadro n. 43, dicembre 2011.

[B3] M. Bramanti: Il ragionare matematico. Testo di conferenza, contenuto in “Conoscenza e compimento di sé”. A cura di Eddo Rigotti e Carlo Wolfsgruber. Fondazione per la Sussidiarietà, Milano 2014, pp. 41-53.

[F] R. Feynman: La legge fisica. (1965), Boringhieri 1971.

[GG] E. Giusti (a cura di): G. Galilei: Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attinenti alla mecanica ed i movimenti locali, Einaudi 1990.

[I] G. Israel: La visione matematica della realtà, Laterza 2003.

[J] M. Jammer. Storia del concetto di forza, Feltrinelli 1971.

[Ma] R. Manara: La matematica e la realtà. Linee di metodo, Marietti 2002.

[Mu] P. Musso: La scienza e l’idea di ragione. Scienza, filosofia e religione da Galileo ai buchi neri e oltre, Mimesis 2011.