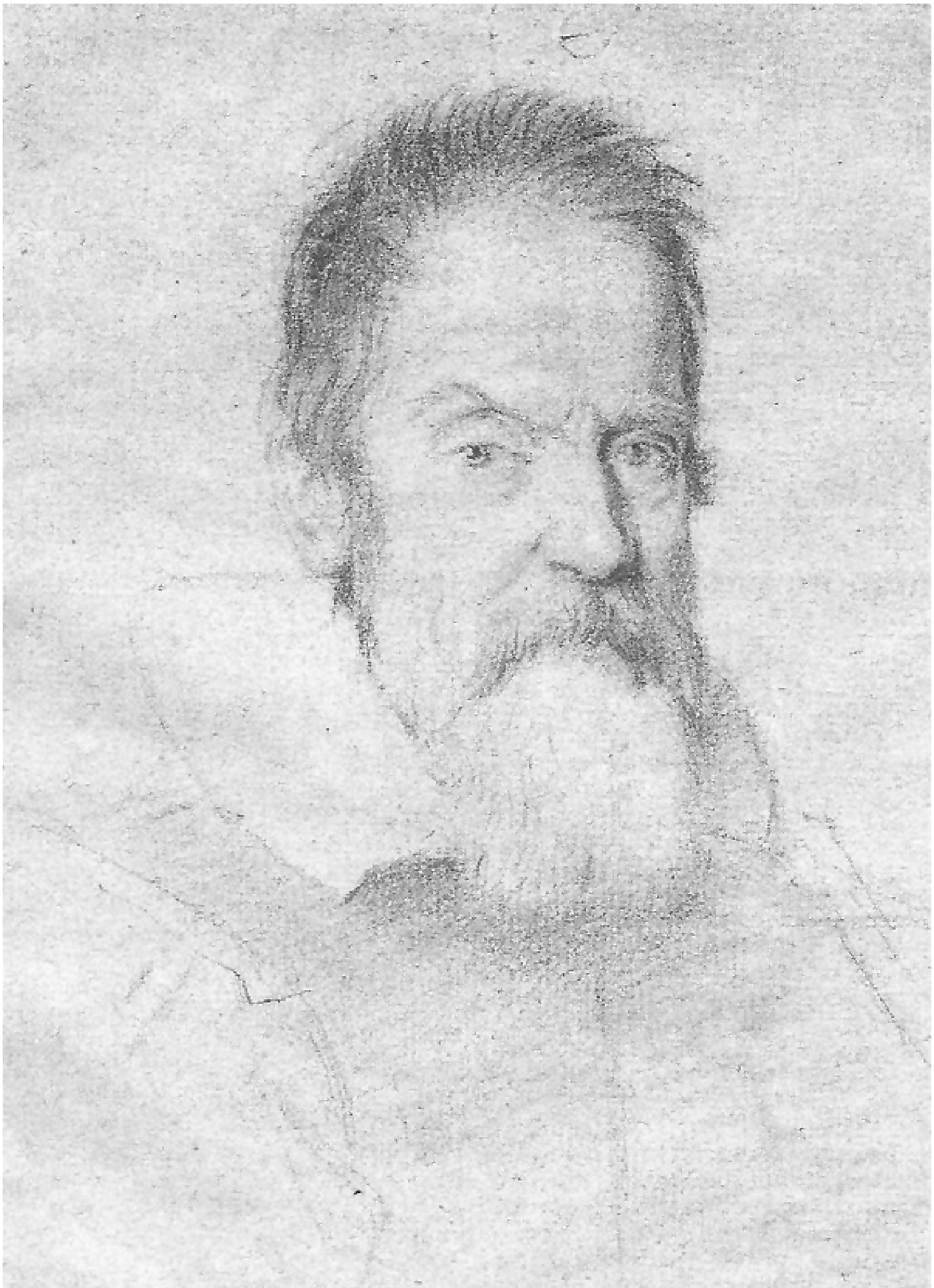


GALILEO E IL «MOTO LOCALE»

gli studi di Galileo prima del 1609

*di Gianni Bonera**

*L'autore mostra il percorso avvincente, anche se non privo di contraddizioni, compiuto da Galileo per affrancarsi dalla teoria aristotelica del moto. I tre teoremi che enuncia, quello della caduta libera, dei piani inclinati e delle corde, gli permettono di affrontare in modo nuovo lo studio del moto, anche se i teoremi, almeno inizialmente, sono più intuiti che dimostrati. Una caratteristica di questo percorso, per certi versi paradossale, è l'utilizzo da parte di Galileo di un metodo della Scolastica: prima mostrar falsi i vecchi concetti (*reprobo*) e poi mostrar validi i nuovi (*probo*). Poiché col senso comune siamo tutti aristotelici, questo metodo può avere delle suggestioni in una didattica che aiuti gli studenti a superare «preconoscenze» errate sul moto dei corpi.*

Nel dicembre del 1609 Galileo puntò per la prima volta il suo nuovo «cannocchiale» verso il cielo e ciò che vide gli confermò la validità del sistema copernicano, che da quel momento difese e propagandò strenuamente con molta abilità e, forse, con un po' troppa arroganza.
Ma da quando egli era copernicano? Le prime indicazioni certe risalgono al 1597. In particolare[1] nell'agosto di quell'anno in una lettera a Keplero, per ringraziarlo del suo nuovo libro che aveva appena ricevuto, dichiara di aver abbracciato la teoria copernicana ormai da vari anni (*in Copernici sententiam multis abhinc annis venerim*) e di aver raccolte molte prove in suo favore (*naturalium effectuum causae sint a me adinventae*). Tali prove, nonostante fossero state sollecitate dallo stesso Keplero, non furono mai presentate. È tuttavia possibile che le prove fossero indirette e venissero, come vedremo, dai suoi studi di dinamica.

I primi studi sul moto

Galileo si pone in una posizione antiaristotelica fin dai suoi primi studi di meccanica iniziati a Pisa nel periodo in cui era professore di matematica presso lo Studio pisano (1589-1592) e i cui risultati sono riportati in un trattato inedito, il *De motu*[2], elaborato in quel periodo e che forse costituiva

*Dipartimento di Fisica
"A. Volta" dell'Università
di Pavia.

[1] Alcuni mesi prima, nel mese di maggio, in una lettera a Jacopo Mazzoni, docente di filosofia e suo collega quando insegnava a Pisa, egli cercava di difendere Copernico da alcune obiezioni da questi formulate.
[2] *Opere di Galileo Galilei*, Edizione Nazionale a cura di A. Favero, Barbera, Firenze 1890-1909 (in seguito EN) Vol. I, p. 250-406. Citato spesso come *De motu antiquiora*, dal titolo originale riportato sulla copertina del Codice che conserva il manoscritto autografo. Si tratta in realtà di una pluralità di versioni della stessa teoria del moto.

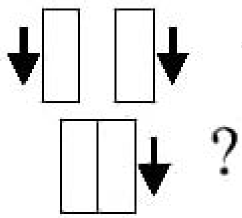
una guida per le sue lezioni. Per quanto riguarda il moto naturale dei corpi egli afferma in particolare

> Aristotele sostiene che mobili del medesimo genere osservino fra di loro, quanto a velocità del moto, quella proporzione che hanno proprio le grandezze dei mobili, e assai chiaramente dice ciò, *4 Caeli t. 16*, dicendo che *un grande* [pezzo di] *oro si muove più celermente di uno piccolo*. Quanto questa opinione sia, in verità, ridicola è più chiaro della luce: infatti chi mai crederebbe se, per esempio, […] da una torre alta fossero lasciati cadere nel medesimo istante due sassi, di cui uno abbia mole doppia dell'altro, quando il minore si trova a metà della torre il maggiore abbia già raggiunto la terra?[il trattato è in latino; i corsivi sono dell'autore]

E prosegue affermando

> Diciamo dunque che mobili della medesima specie (vengono detti della medesima specie quelli che sono formati dalla medesima materia, come piombo, oppure legno, etc.) quantunque differiscano nella mole, si muovono tuttavia con la *medesima celerità*, ed un sasso più grande non discende più celermente di uno più piccolo. Coloro che si stupiscono di questa conclusione, si stupiranno altresì che tanto una trave grandissima quanto un piccolo legno possano galleggiare.

A conferma di ciò presenta tra l'altro questo «esperimento mentale».



> Se supponiamo, infatti, che a e b siano mobili uguali e siano vicinissimi fra loro, allora, siamo tutti d'accordo, si muoveranno con uguale celerità: pertanto, se immaginiamo che essi durante il movimento si uniscano, perché, domando, come voleva Aristotele, raddoppieranno la celerità del moto o la aumenteranno?

Secondo il Viviani che gli fu vicino negli ultimi anni di vita nell'esilio di Arcetri, Galileo verificò tale risultato con il famoso esperimento dalla torre di Pisa, sulla cui effettiva realizzazione gli storici hanno oggi qualche dubbio. «In quel tempo, parendogli d'apprendere ch'all'investigazione degli effetti naturali necessariamente si richiedesse una vera cognizione della natura del moto, stante quel filosofico e vulgato assioma ignorato *motu ignoratur natura*, tutto si diede alla contemplazione di quello: et allora, con grande sconcerto di tutti i filosofi, furono da esso vinte di falsità, per mezzo di esperienze e con salde dimostrazioni e discorsi, moltissime conclusioni dell'istesso Aristotele intorno alla materia del moto […], come tra l'altre, che la velocità de' mobili dell'istessa materia, disegualmente gravi, non conservano altrimenti la proporzione delle gravità loro, anzi si muovono con pari velocità, dimostrando ciò con replicate esperienze, fatte dall'altezza del Campanile di Pisa, con l'intervento delli altri lettori e filosofi e di tutta la scolaresca.»[3]

Un secondo risultato ottenuto in questo periodo riguarda la velocità di caduta di un grave lungo piani diversamente inclinati. Galileo si chiede infatti

> perché uno stesso mobile pesante, che discenda naturalmente lungo piani inclinati sull'orizzonte, si muova più facilmente e celermente in quelli che formino con l'orizzonte angoli prossimi al retto, ed, inoltre, si cerca la proporzione fra i fattori di tali moti per diverse inclinazioni. (EN Vol. I, p. 296)

[3] V. Viviani, *Racconto istorico della vita di Galileo Galilei*, EN Vol. XIX, p. 606.

Egli calcola dapprima quale forza è necessaria per tenere in equilibrio un corpo lungo un piano inclinato. La dimostrazione fa riferimento alle leggi archimedee relative all'equilibrio della bilancia.[4]

Nella bilancia a bracci eguali e obliqui DOE con fulcro in O (si veda l'immagine a lato) uno spostamento virtuale di un grave posto in E avviene lungo la direzione del piano inclinato AB tangente in E alla circonferenza di raggio DO = OE. Pertanto per tenere in equilibrio un corpo di peso P posto in E sul piano inclinato è necessario applicare in D alla bilancia DOE, una forza F tale che

$$F : P = OH : OD$$

Essendo OD = OE, dalla similitudine dei due triangoli rettangoli OHE e ACB abbiamo

$$F : P = OH : OD = OH : OE = AC : AB$$

Cioè in termini moderni $F = P(AC/AB) = P \sin\alpha$ essendo α l'angolo ABC

Assumendo allora che un «corpo discende spinto dalla stessa forza che è necessario per tenerlo in equilibrio» ricava:

«Il momento di venire al basso che ha il mobile sopra il piano inclinato AB, al suo totale momento, con lo qual gravità nella perpendicolare all'orizzonte AC, ha la medesima proporzione che essa linea AC alla AB».[5]

Cioè:

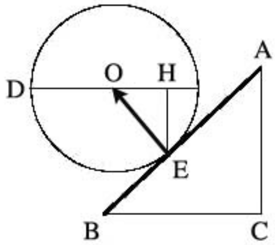
$$m(ab) : m(ac) = AC : AB$$

In questo contesto il «momento» è definito come «quell'impeto di andare al basso, composto di gravità, posizione e di altro, dal che possa essere tal propensione cagionata [cioè la componente della forza peso lungo il piano].»

A questo punto Galileo ritiene che il mobile discenda tanto più facilmente quanto maggiore è il momento e quindi afferma che «fra la *celerità* lungo AB e la *celerità* lungo AC intercorrerà la stessa proporzione come fra la linea AC e la linea AD».

Se assumiamo, seguendo Aristotele, che la velocità di caduta di un corpo sia costante e proporzionale alla forza responsabile del moto, cioè al momento, la «celerità» rappresenterebbe tale velocità. Il risultato non è quindi corretto in quanto, come sappiamo, il moto è uniformemente accelerato e pensando anche alla velocità media, cioè alla velocità di quel moto uniforme che nello stesso tempo di caduta percorrerebbe lo stesso spazio, essa, essendo pari a metà della velocità finale, è la stessa per tutti i piani inclinati a parità di altezza.

[4] La dimostrazione è particolarmente lunga e complessa, ne riportiamo qui una sintesi con notazione moderna.



[5] Ibidem p. 324.

Il periodo padovano

Trasferitosi a Padova[6] Galileo continuò a occuparsi del moto naturale e violento dei corpi fino al 1609 quando venne totalmente assorbito dalle ricerche astronomiche e dalle dispute sul sistema planetario.

Le ricerche di questo periodo «che, pur degne di essere conosciute, non

[6] Nell'estate del 1592 Galileo ottenne dal granduca l'autorizzazione a lasciare la Toscana e accettare la cattedra di matematica a Padova, più vantaggiosa sul piano finanziario e più promettente su quello culturale.

sono mai state finora osservate, nonché dimostrate», verranno riprese molto più tardi e costituiranno la Terza e Quarta Giornata dei *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*[7] la cui stesura definitiva avverrà tra il 1633 e il 1638 durante l'esilio di Arcetri, non senza grosse difficoltà.[8]

La scoperta dell'isocronismo delle oscillazioni pendolari, anche se potrebbe risalire ancora al periodo pisano, produrrà però un drastico cambiamento nel suo programma di ricerca. «Trovandosi il Galileo, in età di vent'anni circa, intorno all'anno 1583, nella città di Pisa [...] et essendo un giorno nel Duomo di quella città, come curioso ed accortissimo che egli era, caddegli in mente di osservare dal moto d'una lampada, che era stata allontanata dal perpendicolo, se per avventura i tempi delle andate e tornate di quelle, tanto per archi grandi che per i mediocri e per i minimi, fossero eguali. Sovvennegli dunque [...] di far[ne] un esamine, come suol dirsi alla grossa per mezzo delle battute del proprio polso [...]»[9]

L'interesse di Galileo non è più rivolto alle velocità di cadute dei corpi ma ai tempi in cui questi processi avvengono.

[7] G. Galilei. *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, Leida, Ed Elzeviri 1638 (di seguito *Discorsi*), EN Vol. VIII.

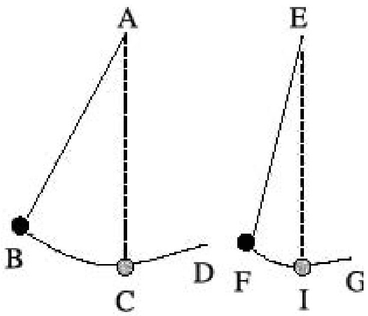
[8] Lettera a Fulgenzio Micanzio del 19 novembre 1634: «Il trattato del moto, tutto nuovo, sta all'ordine; ma il mio cervello inquieto non può restar d'andar mulinando, e con gran dispendio di tempo, perché quel pensiero che ultimo mi sovviene circa qualche novità mi fa buttare a monte tutti i trovati precedenti.» (EN Vol. XVI, p. 162).

[9] V. Viviani, *Racconto istorico*, EN Vol. XIX, p. 647.

I tempi di oscillazione nel moto pendolare

Il primo documento in cui Galileo riferisce di esperienze condotte con pendoli è una lettera inviata a Guidobaldo del Monte il 29 novembre 1602.

Piglio dunque due fili sottili, lunghi ugualmente due o tre braccia l'uno e siano AB, EF, e gli appicco a due chiodetti A, E, e nell'altre estremità B, F lego due palle di piombo uguali (se ben niente importa se fussero disuguali) [ciò a conferma del fatto che corpi della stesso sostanza cadono con la stessa velocità] rimuovendo poi ciascuno de' detti fili dal suo perpendicolo, ma uno assai, come saria per l'arco CB, e l'altro pochissimo, come saria secondo l'arco IF; gli lascio poi nell'istesso momento di tempo andar liberamente, e l'uno comincia a descrivere archi grandi, simili al BCD, e l'altro ne descrive de' piccoli, simili all'FIG; ma non *però consuma più tempo* il mobile B a passare tutto l'arco BCD, che si faccia *l'altro mobile* F *a passare l'arco* FIG.

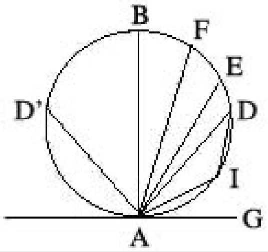


[...] Quanto poi al parere irragionevole che, pigliandosi una quarta lunga 100 miglia, due mobili uguali possino passarla, uno tutta, e l'altro un palmo solo, in tempi uguali, dico esser vero che ha dell'ammirando; ma [...] questa proposizione ha seco per avventura più inverisimilitudine di quello che si habbia che i triangoli tra le medesime parallele et in basi uguali siano sempre uguali, potendone fare uno brevissimo e l'altro lungo mille miglia.

(EN Vol. X, p. 56)

A questo punto Galileo per confermare, almeno in parte, quanto precedentemente osservato enuncia un teorema, che potremo chiamare «Teorema delle corde» e che avrà un ruolo fondamentale nello sviluppo del pensiero galileiano.

Sia del cerchio BDA il diametro BA eretto all'orizzonte, e dal punto A sino alla circonferenza tirate linee utcumque AF AE, AD: dimostro, mobili uguali cadere in tempi uguali e per la perpendicolare BA e per piani inclinati secondo le linee, DA, EA, FA; sicchè, partendosi nell'istesso momento dalli punti B, D, E, F, arriveranno in uno stesso momento al termine A, e sia la linea DA piccola quant'esser si voglia. […] Sin qui ho dimostrato senza trasgredire i termini mecanici; ma non posso spuntare a dimostrare come gli archi DIA et IA siano passati in tempi uguali: che è quello che cerco.



In termini moderni $t(ad) = \sqrt{2AD/g \sin DAG} = \sqrt{2AB \sin DAG/g \sin DAG} = \sqrt{2AB/g}$ per qualsiasi corda. È interessante notare che l'oscillazione lungo la spezzata DAD' è sempre isocrona con un periodo $T = 4\ t(ad) = 8\sqrt{l/g}$ dove l è la lunghezza del pendolo equivalente le cui oscillazioni per piccole ampiezze hanno un periodo $T = 2p\sqrt{l/g}$ minore del precedente. Quando nella dimostrazione del periodo del pendolo per piccole oscillazioni si afferma «assumendo l'arco uguale alla corda» si compie in realtà una approssimazione matematica ($\sin \alpha = \alpha$) e non fisica!
Sempre nella stessa lettera a Guidobaldo del Monte enuncia un'altra interessante proprietà riguardante il moto lungo un arco di cerchio.

E forse anco più inopinabile parerà questo, pur da me dimostrato, che essendo la linea DA non maggiore della corda d'una quarta, e le linee DI, IA utcumque, più presto fa il medesimo mobile il viaggio DIA, partendosi da D, che il viaggio solo IA, partendosi da I.

Questo risultato verrà ripresentato in forma dialogata nella Giornata Prima dei *Discorsi*.

SALV. Circa poi i descendenti per gli archi delle medesime corde elevati sopra l'orizonte, e che non siano maggiori d'una quarta, cioè di novanta gradi, mostra parimente l'esperienza, passarsi tutti in tempi eguali, ma però più brevi de i tempi de' passaggi per le corde; effetto che in tanto ha del maraviglioso, in quanto nella prima apprensione par che dovrebbe seguire il contrario: imperò che, sendo comuni i termini del principio e del fine del moto, ed essendo la linea retta la brevissima che tra i medesimi termini si comprende, par ragionevole che il moto fatto per lei s'avesse a spedire nel più breve tempo; il che poi non è, ma il tempo brevissimo, ed in conseguenza il moto velocissimo, è quello che si fa per l'arco del quale essa linea retta è corda.[10] (EN Vol. X, p. 139)

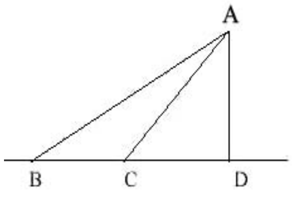
[10] La conclusione che il moto di caduta più veloce tra due punti non sia quello lungo la linea più breve, cioè il segmento che li unisce, ma quello lungo un arco di cerchio, come è noto, non è corretta in quanto, come dimostrato contemporaneamente e indipendentemente da J. Bernouilli, Leibniz, de l'Hopital e Newton nel 1697, la curva brachistocrona è data da una cicloide.

I tempi di caduta lungo piani inclinati

Un secondo teorema riguarda il tempo di caduta lungo piani inclinati.

I tempi di caduta di uno stesso mobile lungo piani in diverso modo inclinati AB, AC, […] ma aventi la stessa altezza AD stanno tra loro come le rispettive lunghezze: t(ab) : t(ac) = AB : AC.

[Infatti $t(ab) = \sqrt{2AB/g\,(\sin ABD)} = \sqrt{2AB/g\,(AD/AB)} = AB\sqrt{2/g\,AD}$]



Infine nella lettera a Paolo Sarpi del 6 ottobre 1604[11] Galileo enuncia per la prima volta la «legge sulla caduta libera» dei corpi.

> […] gli spazii passati dal moto naturale esser in proporzione doppia dei tempi, et per conseguenza gli spazii passati in tempi eguali esser come i numeri impari ab unitate, et le altre cose. (EN Vol. X, p. 115)

Tutto il materiale che riguarda lo studio del moto naturale e violento dei gravi sviluppato nel periodo padovano e che costituirà, come abbiamo già detto, la Terza e Quarta giornata dei *Discorsi* si basa su questi tre teoremi che vengono di seguito riportati nell'ordine e nella versione originale con la quale figurano nei *Discorsi*.

Teorema della Caduta libera TC (*Teorema* II)
Si aliquod mobile motu uniformiter accelerato descendat ex quiete, spatia quibuscunque temporibus ab ipso peracta, sunt inter se in duplicata ratione eorundem temporum, nempe ut eorundem temporum quadrata.

Teorema sui piani inclinati LT (*Teorema* III)
Tempora descensuum super planis diversimode inclinatis, dum tamen eorum eadem sit elevatio, esse inter se ut eorum longitudines.

Teorema delle Corde TC (*Teorema* VI)
Si a puncto sublimi vel imo circuli ad horizontem erecti ducantur quaelibet plana usque ad circumferentiam inclinata, tempora descensuum per ipsa erunt aequalia.

Mentre il primo teorema può essere ottenuto nell'ambito cinematico, assumendo un moto uniformemente accelerato, cioè

$$v \propto t \quad \text{da cui } s \propto t^2 \quad \text{e quindi } t \propto \mu \sqrt{s}$$

il secondo e il terzo teorema devono essere risolti in ambito dinamico considerando la forza **f** agente nella direzione del moto.
Galileo non era quindi in grado di ricavare correttamente i due teoremi ed inoltre aveva anche in quel periodo grosse difficoltà per quanto riguarda la stessa legge dei quadrati a causa, come abbiamo visto, della mancanza di una corretta definizione di velocità in un moto non uniforme.
Ma allora come è arrivato a formulare questi teoremi? Il materiale elaborato in questo periodo ampio e articolato ci è pervenuto in modo quasi completo[12], purtroppo non in ordine cronologico, anche se esistono alcuni studi basati sul tipo di carta (filigrana) e di inchiostro usato[13] che, accompagnati da una analisi critica del contenuto, ci possono dare delle indicazioni plausibili. Si tratta di 194 fogli, la maggior parte dei quali scritti da entrambe le parti (*recto* e *verso*) e di questi quasi due terzi si riferiscono proprio al periodo padovano.

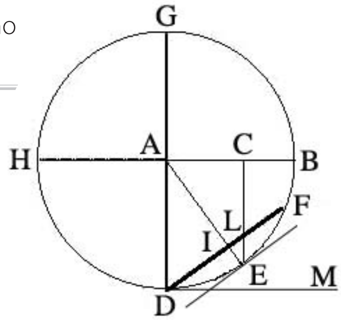
[11] La pubblicazione e la discussione della legge avverrà solo nei *Discorsi*, a parte un breve cenno nel *Dialogo*: «SALV. […] l'Accademico, nostro comune amico […] in alcuni suoi scritti non ancora pubblicati, ma in confidenza mostrati a me e ad alcuni altri amici suoi, dimostra come l'accelerazione del moto retto dei gravi si fa secondo i numeri impari ab unitate.» (EN Vol VII, p. 248).

[12] Esso è raccolto nel *Codex* 72, conservato presso la Biblioteca Nazionale di Firenze, riportato in EN Vol. VIII sotto la voce *Frammenti* e ora consultabile e scaricabile in rete nel sito http://www.mpiwg-berlin.mpg.de/Galileo_Prototype/INDEX.HTM.

[13] S. Drake, *Galileo notes on motion*, Suppl. Annali dell'Istituto e Museo di Storia della Scienza, Firenze, 1979,Vol. 2 e più recentemente F.Lucarelli, P.A. Mandò, *Studiyng the chronology of Galileo's writings with PIXE*, *Nuclear Physics News*, Vol. 6, N.2 1996, 24.

Il teorema delle corde

La prima dimostrazione del teorema «in termini mecanici» la troviamo nel manoscritto 151r.



> Sia GD eretta all'orizzonte, e DF inclinata: dico, che il moto da G in D e da F in D si svolge nel medesimo tempo. Infatti il momento lungo FD è lo stesso che lungo la tangente in E, che è parallela a FD; dunque il momento lungo FD sta al momento totale come CA sta ad AB, cioè AE; ma come CA ad AE, così ID a DA, e il doppio FD al doppio DG, *quindi il momento lungo* FD *al momento totale, cioè lungo* GD, *è come* FD *a* GD: dunque [*ergo*] il moto lungo FD e GD avviene nello stesso tempo. (EN Vol. VIII, p. 378)
> [In latino nel manoscritto, il corsivo è dell'autore]

Come si vede, Galileo si richiama espressamente al teorema del *De motu*: il momento lungo la tangente in E (e quindi lungo la corda DF ad essa parallela) sta al momento totale (cioè lungo la verticale GD) come CA sta ad AH, cioè ad AE. Dalla similitudine dei triangoli ACE e AID risulta

$$CA : AE = ID : DA = 2\ ID : 2\ DA = DF : GD.$$

Pertanto il momento lungo FD sta al momento totale, cioè lungo GD, come FD sta a GD. A questo punto essendo i momenti proporzionali agli spazi percorsi lo saranno anche le velocità (*celeritas*) e quindi (*ergo*) i tempi devono essere uguali. Questa assunzione come abbiamo visto non è corretta e può essere solo giustificata nell'ambito della fisica aristotelica assumendo che il moto di caduta dei gravi sia uniforme con velocità proporzionale al momento, cioè alla forza motrice.[14] Pur tuttavia il risultato è corretto[15] in quanto in un moto uniformemente accelerato, nel caso particolare in cui ci si riferisce a intervalli di tempo uguali, le velocità finali e quindi le velocità medie sono proporzionali alle forze motrici [$v_m = \frac{1}{2} v_f = \frac{1}{2} (F/m)t$].

[14] Questa ipotesi era comunque accettata da molti scienziati dell'epoca.
[15] Infatti $t(fd) = \sqrt{2FD/g \sin FDM} = \sqrt{2GD/g}$ [essendo $\sin FDM = ED/GD$] eguale per tutte le corde.

La legge di caduta dei gravi

Nella lettera del 1604 a Paolo Sarpi, già citata, Galileo scriveva

> Ripensando circa le cose del moto, nelle quali, per dimostrare li accidenti da me osservati, mi mancava *principio* totalmente indubitabile da poter porlo per assioma, mi son ridotto ad una proposizione la quale ha molto del naturale et dell'evidente; *et questa supposta*, dimostro poi il resto, cioè gli spazzii passati dal moto naturale esser in proporzione doppia dei tempi, et per conseguenza gli spazii passati in tempi eguali esser come i numeri impari ab unitate, et le altre cose. Et il principio è questo: che il mobile naturale vadia crescendo di velocità con quella proportione che si discosta dal principio del suo moto.

Nella lettera, quindi, Galileo non dà molta importanza alla legge di caduta dei gravi, «li accidenti da [lui] osservati» quanto all'aver individuato «un principio totalmente indubitabile da poter porlo per assioma» da cui «dimostrare» la legge.

Su entrambe le facciate del manoscritto 128, scritto in italiano probabilmente nello stesso anno della lettera, ritroviamo l'enunciato del principio e una sua possibile giustificazione.

> […] e Io suppongo (et forse potrò dimostrarlo) che il grave cadente naturalmente vada continuamente accrescendo la sua velocità secondo che accresce la distanza dal termine onde si partì: […] Questo principio mi par molto naturale, et che risponda a tutte le esperienze che veggiamo negli strumenti et machine che operano percotendo, dove il percuziente fa tanto maggiore effetto quanto da più grande altezza casca:[16] et supposto questo principio dimostrerò il resto.
> (EN Vol. VIII, p. 373)

[16] In realtà l'effetto della percossa è proporzionale a v^2 e non a v. Abbiamo infatti $\frac{1}{2}\,\mu v^2 = \mu gh$.

La dimostrazione, chiaramente errata, si ritrova con una formulazione abbastanza simile ma in latino nel manoscritto 85r. Tutta la dimostrazione è stata però successivamente cancellata.
Non si trovano in nessun manoscritto richiami al principio corretto $v \propto t$ e alla dimostrazione che sarà riportata nei *Discorsi* partendo da tale principio. Essa quindi potrebbe essere stata ottenuta solo durante la stesura finale.

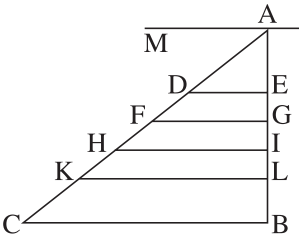
La relazione tra lunghezze e tempi di caduta lungo piani inclinati

[17] R. Caverni, *Storia del metodo sperimentale in Italia*, Cavelli, Firenze 1895, Vol. IV.

Secondo Caverni[17], che per primo ha studiato i manoscritti galileiani, e il cui lavoro è stato purtroppo poco studiato dagli storici, Galileo conosceva questo teorema prima del 1600, ricavandolo, evidentemente in maniera errata, direttamente dal teorema del *De motu* già citato. Come abbiamo visto, in tale trattato Galileo afferma che la velocità (intesa come *celeritas*) di caduta lungo piani diversamente inclinati ma aventi la stessa altezza è proporzionale alle rispettive lunghezze e quindi assumendo la velocità inversamente proporzionale al tempo

$$t(AC) : t(AB) = AC : AB \quad \text{[a parità di spazio!]}$$

come viene del resto affermato nel già citato *Folio* 128v : «[…] la velocità alla velocità ha contraria proporzione di quella che ha il tempo al tempo (imperó che il medesimo è crescere la velocità che sciemare il tempo)».
Una dimostrazione diretta del teorema si trova nel manoscritto 179r del 1606.
Galileo suddivide la caduta verticale AB in «quasi innumerevoli piccoli spazi EG, GL,…» a cui corrispondono altrettanti spazi sull'inclinata AC (DF, FH, ...) le cui lunghezze stanno tra loro come AB sta ad AC e assume che le velocità nei punti E, G, I, … della verticale siano le stesse che nei corrispondenti punti lungo l'inclinata AC, riallacciandosi al principio errato enunciato nella lettera a Sarpi.



Pertanto ritenendo costante la velocità in ogni tratto si ottiene

$$\Delta t(EG) : \Delta t(DF) = EG : EF$$

e quindi sommando su tutto l'intero percorso

$$t(AB) : t(AC) = AB : AC$$

Il risultato è comunque ancora una volta corretto in quanto nei punti E,

D le velocità sono effettivamente le stesse in quanto la stessa è l'energia cinetica acquistata.
A questo punto è naturale porsi la domanda: se la nuova teoria del moto è stata costruita da Galileo su tre teoremi corretti, ma la cui dimostrazione era errata, è stato tutto merito della fortuna? Non lo penso.
Galileo era sicuro della validità dei teoremi sorretto sia dall'intuizione sia dal fatto che essi erano coerenti tra di loro in quanto da «due qualsiasi di essi si ricava il rimanente», come si può facilmente vedere dalla formulazione in termini di proporzioni (l'unica a quel tempo possibile)[18] nel caso particolare di moti lungo corde di un cerchio.

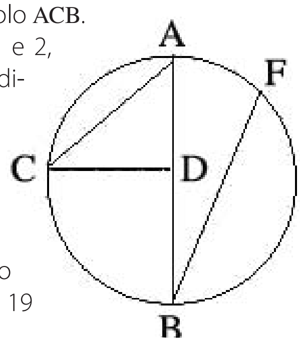
[18] Scrive lo stesso Galileo nel *Saggiatore*: «[L'universo] è scritto in lingua matematica e i caratteri sono triangoli, cerchi e altre figure geometriche, senza le quali è impossibile intenderne umanamente parola». (EN Vol. VI, p. 229)

La legge di caduta libera

Per quanto riguarda la legge di caduta libera abbiamo

$$t(AD) : t(AB) = \sqrt{AD} : \sqrt{AB} = AD : \sqrt{AD x AB} = AD : AC$$

sulla base del teorema di Euclide applicato al triangolo rettangolo ACB. Come si vede il teorema 3 deriva direttamente dai teoremi 1 e 2, mentre il teorema 1 deriva dal teorema 2 con la semplice condizione 3 e analogamente il teorema 2 dal teorema 1.



Nei manoscritti ritroviamo tutte queste dimostrazioni nel caso generale e i relativi manoscritti furono fatti ricopiare da Galileo a Firenze intorno al 1618 a dimostrazione della loro importanza per una stesura finale del trattato. Che avverrà, come abbiamo già detto, solo a partire dal 1633 non senza difficoltà come Galileo stesso ebbe ad affermare in una lettera a Fulgenzio Micanzio del 19 novembre 1634.

> […] il trattato del moto, tutto nuovo, sta all'ordine; ma il mio cervello inquieto non può restar d'andar mulinando, e con gran dispendio di tempo, perchè quel pensiero che ultimo mi sovviene circa qualche novità mi fa buttare a monte tutti i trovati precedenti.

È tuttavia probabile che Galileo abbia cercato di realizzare in precedenza almeno due volte la stesura dell'opera. La prima ancora nel periodo padovano, come si evince da una lettera a Belisario Vinta del 7 maggio 1610 nelle quale indicava tra le opere che intendeva pubblicare.

> […] tre libri *De motu locali*, scienza interamente nuova, non havendo alcun altro, nè antico nè moderno, scoperto alcuno de i moltissimi sintomi ammirandi che io dimostro essere ne i movimenti naturali et ne i violenti, onde io la posso ragionevolissimamente chiamare scienza nuova et ritrovata da me sin da i suoi primi principii.

Una seconda volta a Firenze intorno al 1618, quando dà mandato a Guiducci e Allegretti di copiare alcune dei suoi più importanti manoscritti. In una lettera di Sagredo a Galileo si legge infatti: «sta egli [padre M. Fulgen-

tio] curioso di vedere […] il suo trattato de' moti, et in niun modo vorrebbe che ella abbandonasse l'impresa».
In queste prime stesure, secondo Caverni[19], Galileo sarebbe partito dalla legge di caduta e dal teorema delle corde.

[19] R, Caverni, op.cit.

La scelta finale: un trattato dimostrativo

La scelta finale fu però quella di non seguire i trattati tradizionali del moto, ma di organizzare il lavoro nello stile delle opere di Archimede ed Euclide, con teoremi e problemi sequenziali preceduti solo dalle definizioni e dai postulati necessari.
Nella lettera a Baliani del 7 di Gennaio 1639, riferendosi appunto ai *Discorsi*, pubblicati due anni prima in Amsterdam, scriveva infatti

> […] io non suppongo cosa nessuna se non la diffinitione del moto, del quale io voglio trattare e dimostrarne gl'accidenti, imitando in questo Archimede nelle Linee Spirali, […]. Io mi dichiaro di volere esaminare quali siano i sintomi che accaggiono nel moto di un mobile il quale, partendosi dallo stato di quiete, vada movendosi con velocità crescente sempre nel medesimo modo, cioè che gl'acquisti di essa velocità vadano crescendo non a salti, ma equabilmente secondo il crescimento del tempo; sichè il grado di velocità acquistato, per esempio, in due minuti di tempo sia doppio dell'acquistato in un minuto, e l'acquistato in tre minuti, e poi in quattro, triplo, e poi quadruplo, del medesimo che fu acquistato nel primo minuto[…]; e non premettendo altra cosa nessuna, vengo alla prima dimostratione, nella quale provo, gli spatii passati da cotal mobile essere in dupplicata proportione di quella de' tempi, e séguito poi a dimostrare buon numero di altri accidenti. […] Argomento ex suppositione sopra il moto, in quella maniera diffinito; sichè quando bene le conseguenze non rispondessero alli accidenti del moto naturale de' gravi descendenti, poco a me importerebbe, […]. Ma in questo sono io stato, dirò così, avventurato, poichè il moto dei gravi et i suoi accidenti rispondono puntualmente alli accidenti dimostrati da me del moto da me definito.

Un'unica *Definizione* e un solo *Principio*

Nei *Discorsi* infatti (Terza e Quarta giornata) l'intero studio del moto naturale dei gravi si basa su un'unica *Definizione* e un solo *Principio*.[20]

> E in primo luogo conviene investigare e spiegare la definizione che corrisponde esattamente al moto accelerato di cui si serve la natura. […]. Questa coincidenza crediamo di averla raggiunta finalmente, dopo lunghe riflessioni; soprattutto per il fatto che le proprietà, da noi successivamente dimostrate, sembrano esattamente corrispondere e coincidere con ciò che gli esperimenti naturali presentano ai sensi.[…]. Possiamo quindi ammettere la seguente definizione del moto di cui tratteremo: Motum aequabiliter, seu uniformiter, acceleratum dicimus eum, qui, a quiete recedens, temporibus aequalia celeritatis momenta sibi superaddit.
> SALV. Fermata cotal definizione, un solo principio domanda e suppone per vero l'Autore, cioè: Accipio, gradus velocitatis eiusdem mobilis super diversas planorum inclinationes acquisitos tunc esse aequales, cum eorumdem planorum elevationes aequales sint. (EN Vol. VIII, p. 205)

[20] A differenza delle prime due giornate e dell'intero volume del *Dialogo*, il trattato é presentato parte in italiano e parte in latino. Il fatto che la maggior parte delle dimostrazioni latine sono identiche a quelle che si trovano sui manoscritti potrebbe avvalorare la tesi del Tannery che ritiene che ciò sia dovuto alla fretta di veder pubblicata la sua opera e alla mancanza del tempo necessario per rielaborare in italiano il materiale a disposizione. Tuttavia non sono da scartare le altre ipotesi in particolare quella che ritiene lo studio del moto locale rivolto a due distinti lettori: il filosofo e l'ingegnere.

Galileo assume quindi come principio che «i gradi di velocità» acquistati da uno stesso mobile cadendo lungo piani inclinati diversamente inclinati, ma aventi la stessa altezza, sono tra loro eguali.
Dalla *Definizione* Galileo ricava direttamente la legge di caduta (*Teoremi I e II*) e dal *Principio* deriva la relazione tra i tempi di caduta lungo piani diversamente inclinati e le rispettive lunghezze (*Teorema III*). La dimostrazione è la stessa di quella riportata nel manoscritto 179r precedentemente citato ricavando dal nuovo principio l'uguaglianza delle velocità nei punti D, E (si veda l'immagine a pagina 77).

Tre dimostrazioni del teorema delle corde

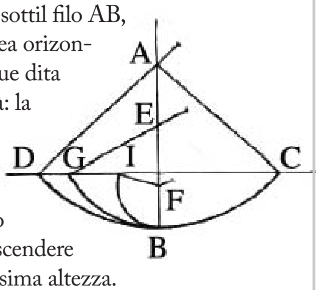
Per quanto riguarda il teorema delle corde (*Teorema* VI) vengono fornite tre dimostrazioni. La prima e la terza utilizzano i due precedenti teoremi mentre la seconda, preceduta dalle parole «Idem aliter demonstratur ex mechanicis» riprende quasi integralmente la dimostrazione riportata nel manoscritto 160r, richiamando in modo esplicito l'assunzione aristotelica della proporzionalità tra la forza impressa e la velocità del moto.[21]
Anche per quanto riguarda il precedente principio enunciato nella lettera a Paolo Sarpi Galileo non rinuncia a ribadire la sensatezza della sua prima assunzione

[21] Viene infatti richiamata la seconda proposizione del primo libro sul moto uniforme che afferma: «si spatia sint ut velocitates, tempora erunt aequalia».

> SAGR. Per quanto per ora mi si rappresenta all'intelletto, mi pare che con chiarezza forse maggiore si fusse potuto definire, senza variare il concetto: Moto uniformemente accelerato esser quello, nel qual la velocità andasse crescendo secondo che cresce lo spazio che si va passando; […].
> SALV. Io mi consolo assai d'aver auto un tanto compagno nell'errore; e più vi diró che il vostro discorso ha tanto del verisimile e del probabile, che il nostro medesimo Autore non mi negó, quando io glielo proposi, d'esser egli ancora stato per qualche tempo nella medesima fallacia. (EN Vol. VIII, p. 203)

pur dimostrando che le deduzioni allora formulate erano errate.
Ma torniamo al *Principio*: nonostante che a Sagredo «par che tal supposto abbia tanto del probabile, che meriti di esser senza controversia», Salviati (lo stesso Galileo) decide

> […] con una esperienza accrescer tanto la probabilità, che poco gli manchi all'agguagliarsi ad una ben necessaria dimostrazione: figuratevi, questo foglio essere una parete eretta all'orizonte [si veda l'immagine che segue] e da un chiodo fitto in essa pendere una palla di piombo d'un'oncia o due, sospesa dal sottil filo AB, lungo due o tre braccia, perpendicolare all'orizonte, e nella parete segnate una linea orizontale DC, segante a squadra il perpendicolo AB, il quale sia lontano dalla parete due dita in circa; trasferendo poi il filo AB con la palla in AC, lasciate essa palla in libertà: la quale primieramente vedrete scendere descrivendo l'arco CBD, e di tanto trapassare il termine B, che, scorrendo per l'arco BD, sormonterà sino quasi alla segnata parallela CD, restando di pervenirvi per piccolissimo intervallo, toltogli il precisamente arrivarvi dall'impedimento dell'aria e del filo; dal che possiamo veracemente concludere, che l'impeto acquistato nel punto B dalla palla, nello scendere per l'arco CB, fu tanto, che bastò a risospingersi per un simile arco BD alla medesima altezza.



Fatta e più volte reiterata cotale esperienza, voglio che ficchiamo nella parete, rasente al perpendicolo AB, un chiodo, come in E o vero in F, che sporga in fuori cinque o sei dita, e questo acciò che il filo AC, tornando, come prima, a riportar la palla C per l'arco CB, giunta che ella sia in B, intoppando il filo nel chiodo E, sia costretta a camminare per la circonferenza BG, descritta intorno al centro E; dal che vedremo quello che potrà far quel medesimo impeto che, dianzi, concepito nel medesimo termine B, sospinse l'istesso mobile per l'arco BD all'altezza della orizontale CD. Ora, Signori, voi vedrete con gusto condursi la palla all'orizontale nel punto G, e l'istesso accadere se l'intoppo si mettesse più basso, come in F, dove la palla descriverebbe l'arco BI, terminando sempre la sua salita precisamente nella linea CD; […]. (EN Vol. VIII, p. 205)

E, dopo aver mostrato come un arco possa essere pensato come un inviluppo di piani inclinati, conclude: «Il discorso mi par concludentissimo, e l'esperienza tutta accomodata per verificare il postulato, che molto ben sia degno d'esser conceduto come se fusse dimostrato.»
Nei *Dialoghi intorno ai due massimi sistemi* del 1632 Galileo aveva introdotto la stessa proprietà giustificandola però con il fatto che in entrambi i casi i corpi si sono avvicinati egualmente al centro della Terra

SALV. […] Intendendo ora la linea CA esser un piano inclinato, esquisitamente pulito e duro, sopra il quale scenda una palla perfettamente rotonda e di materia durissima, ed una simile scenderne liberamente per la perpendicolare CB, domando se voi concedereste che l'impeto della scendente per il piano CA, giunta che la fusse al termine A, potesse essere eguale all'impeto acquistato dall'altra nel punto B, doppo la scesa per la perpendicolare C B.
SAGR. Io credo risolutamente di sí, perché in effetto amendue si sono avvicinate al centro egualmente, e, per quello che pur ora ho conceduto, gl'impeti loro sarebbero egualmente bastanti a ricondur loro stesse alla medesima altezza. (EN Vol. VII, p. 47)

Le critiche dei contemporanei al *Principio*

Tuttavia il *Principio* verrà criticato dai contemporanei; in particolare Torricelli riferendosi al lavoro di Galileo scrive: «Sul punto di trattare del Moto naturalmente accelerato Galileo suppone un principio, che anch'egli non ritiene del tutto evidente, poiché si sforza di comprovarlo con l'esperimento poco esatto del pendolo. [...]. So che Galileo negli ultimi anni della sua vita cercò di dimostrare quella supposizione, ma poiché la sua argomentazione non è stata edita con il libro sul Moto, ritenemmo di preporre al nostro libretto queste poche righe, affinché appaia che la supposizione di Galileo si può dimostrare.»[22]
E ancora nella *Recensione* di Cartesio ai *Discorsi* si legge: «Egli suppone inoltre che i gradi di velocità di uno stesso corpo su piani diversi siano uguali quando le altezze di questi piani sono uguali, cosa che non dimostra e che non è del tutto vera; e poiché tutto ciò che segue non dipende che da queste due supposizioni, si può asserire che egli ha costruito totalmente in aria.»[23]
Lo stesso Galileo dopo la pubblicazione dei *Discorsi* pensò di introdurne una dimostrazione in una successiva riedizione[24], come risulta dalla seguente lettera a Castelli del 3 dicembre 1639.

[22] E. Torricelli, *Opere*, 1919, vol. III, p. 156. La dimostrazione fornita da Torricelli parte dal presupposto che due gravi congiunti non possono muoversi da sé, se il loro comune centro di gravità non si abbassa.
[23] Lettera di Cartesio a Mersenne dell'11 ottobre 1638. *Oeuvres de Descartes*, Vol. 2, pp.382-384, Parigi 1897.
[24] Intende, l'edizione di Leida dei *Discorsi*. Cfr. EN Vol. VIII, p. 214, nota 1.

> È manifesto pur troppo, Sig. mio Reverendiss., che il dubitare in filosofia è padre dell'inventione, facendo strada allo scoprimento del vero. L'oppositioni fattemi, son già molti mesi, da questo giovane [Vincenzo Viviani] al presente mio ospite et discepolo, contro a quel principio da me supposto nel mio trattato del moto accelerato, ch'egli con molta applicatione andava allora studiando, mi necessitarono in tal maniera a pensarvi sopra, a fine di persuadergli tal principio per concedibile e vero, che mi sortì finalmente, con suo e mio gran diletto, d'incontrarne, s'io non erro, la dimostratione concludente, che da me fin ora è stata qui conferita a più d'uno. Di questa egli ne ha fatto adesso un disteso per me, che, trovandomi affatto privo degli occhi, mi sarei forse confuso nelle figure e caratteri che vi bisognano. È scritta in dialogo, come sovvenuta al Salviati, acciò si possa, quando mai si stampassero di nuovo i miei *Discorsi e Dimostrationi*, inserirla immediatamente doppo lo scolio della seconda propositione del suddetto trattato, a faccie 177 di questa impressione, come teorema essentialissimo allo stabilimento delle scienze del moto da me promosse. (EN Vol. XVIII, p. 125)

Tale dimostrazione, in effetti introdotta dal Viviani nell'edizione successiva in forma dialogata e in italiano, non poteva che essere di tipo dinamico, in quanto il *principio* deriva dalla proprietà conservativa del campo gravitazionale. Pertanto Galileo doveva necessariamente tornare alle dimostrazioni «in termini mecanici» dei primi anni del 1600.

Conclusioni

Da quanto abbiamo visto nei precedenti paragrafi, l'immagine dello scienziato pisano potrebbe risultare un poco offuscata se non si considera quanto difficile sia stato il passaggio dalle due visioni del mondo: quella aristotelica e quella newtoniana.
Come ebbe ad affermare R.J. Whitaker:[25] «Aristotele formulò semplicemente come proposizioni scientifiche universali le esperienze più comuni e banali in materia di moto, mentre la meccanica classica, con il suo principio di inerzia, fa asserzioni che non soltanto non trovano mai conferma nell'esperienza d'ogni giorno, ma la cui diretta verifica sperimentale è fondamentalmente impossibile. La fisica aristotelica ha sulla meccanica classica il vantaggio di trattare situazioni concrete che si possono incontrare quotidianamente. Ma da un punto di vista scientifico è proprio questo vantaggio a costituire la sua debolezza, giacchè queste situazioni sono estremamente complesse.»
E conclude, riprendendo un'affermazione dello storico R. J. Disjksterhius[26] «la storia ripete se stessa ogni anno [nelle classi], oggi ogni studente deve lottare contro gli stessi errori e le stesse concezioni errate che si dovettero superare allora.».
Gli insegnanti quindi, a cui è diretto questo saggio, devono essere coscienti di questi fatti e aiutare gli studenti a esplicitare e superare le loro preconoscenze specie nell'insegnamento dei principi della meccanica.
In questo contesto credo che la pedagogia migliore possa essere ancora quella della Scolastica *reprobo et probo*, cioè prima ti dimostro che quello che hai in mente è sbagliato (*reprobo*) e poi ti dimostro (*probo*) come van-

[25] R.J. Whitaker, *Aristotle is not dead*, Am. Jour. of Phys. (1983), p. 352.
[26] R.J. Disjksterhius, *Il meccanismo e l'immagine del mondo*, 1971 [ed orig. 1950] p. 45.

no effettivamente le cose. Un esempio esemplare di questa pedagogia [27] lo troviamo nella *Divina Commedia* quando Beatrice spiega a Dante l'origine della macchie lunari[28] (*Paradiso*, canto II e III).

Par. II
58 "Ma dimmi quel che tu da te ne pensi"
Ed io: "Ciò che n'appar quassù diverso,
credo che il fanno i corpi rari e densi"
[…]
61 Ed ella "Certo assai vedrai sommerso
nel falso il creder tuo, se ben ascolti
l'argomentar ch'io gli farò avverso.
[…]
97 Tre specchi prenderai; e due removi …
[…]
109 Così rimaso te nell'intelletto
voglio informar di luce sì vivace,
che ti tremolerà nel suo aspetto".

Par. III
1 Quel sol che pria d'amor
mi scaldò il petto
Di bella verità m'avea scoverto
Provando e riprovando,
il dolce aspetto

Gli argomenti trattati in questo saggio e in altri che verranno successivamente pubblicati spero possano essere di aiuto. ❖

[27] Il motto dell'Accademia del Cimento fatto proprio dalla Società Italiana di Fisica ha chiaramente un significato diverso. Si veda G. Bonera *Provando e riprovando*, Giornale di Fisica, Vol 37, 2 (1997) p. 109.
[28] Seguendo Averroè, Dante attribuisce la diversità di splendore che si scorge nelle varie parti della superficie lunare ad una diversa densità della materia lunare, che ne modifica il potere riflettente o rifrangente.